ИСТИННОСТЬ АКСИОМАТИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИИ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ У ЕВКЛИДА И ФРЕГЕ

А. В. Хлебалин
Новосибирский государственный университет
Институт философии и права СО РАН, Новосибирск
sasha_khl@mail.ru

Aleksandr Khlebalin
Novosibirsk State University, Institute of philosophy and law, Novosibirsk, Russia

Truth of geometry axiomatization: definitions in Euclid and Frege

Abstract. Based on reconstruction G. Frege's project for foundation of axiomatic method and his treatment of the role of definitions in justification of axiomatic system, in the article I discuss the role of definitions in Euclid's axiomatic in their function of elucidations, in Fregan terms.

Keywords: definition, axiom, truth, Euclid's geometry, G. Frege.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №16-18-10359).

Начала Евклида, безо всякого сомнения, в своем культурном значении сравнялись со своей невероятной значимостью в истории математики. Выступая, своего рода точкой отсчета в истории математики в качестве научной дисциплины, *Начала* остаются образцом представления знания на протяжении веков: И. Ньютон излагает в *Philosophiae Naturalis* классическую физику, а подлинную природу математического знания Б. Рассел представил в *Principia Mathematica*, полагая себя наследником и Ньютона, и Евклида в деле организации системы знания. В равной степени Д. Гильберт, провозглашая на рубеже XIX–XX вв. проект развития математики, предпосылает своей знаменитой речи 1900 г. годом ранее опубликованную версию нового аксиоматического метода. Наконец, *Eléments de Mathématique* группы Бурбаки, претендующие на создание полностью самодостаточной интерпретации математики, в очередной раз, недвусмысленно отсылают к Евклиду. Слишком часто интеллектуальное предприятие, претендующее представить новую, подлинную систему организации знания, возводит свою родословную к *Началам* Евклида. Такие очевидные отсылки к *Началам* на каждом революционном этапе развития математики должны свидетельствовать о чем-то большем, нежели простая дань уважения к великому достижению александрийского математика. Но вопрос о том, в какой степени отсылка к *Началам* в названии своего Opus Magnum, действительно является продолжателем идей последнего на данном этапе развития науки, требует уточнения. Иными словами, утверждение о том, что Евклид создал аксиоматический метод, требует более внимательного рассмотрения; и в прояснении нуждается, прежде всего, само выражение «аксиоматический метод» и представления о его природе.

Безусловно, триумфом аксиоматического метода в качестве системы представления знания становится рубеж XIX–XX вв., когда сам метод не только появляется в современном виде, восходя к работам М. Паша и Дж. Пеано и находя свое каноническое воплощение в «Основаниях геометрии» Д. Гильберта, но и сама его природа и эпистемологические характеристики становятся предметом бурного обсуждения. Традиционное представление о роли аксиом в формальной системе и их эпистемологическом статусе во многом обусловлено тем, что вопросы эти рассматриваются в контексте проблемы обоснования дедуктивного знания: аксиомам отводится роль основания строгого представления теории, и они не более чем «привносят порядок в уже развитую область».[1] Тем самым специфическая роль аксиом в представлении знания, так или иначе, признается – ведь в конечно счете, выбор аксиом накладывает существенные ограничения на совокупность выводимых теорем. И собственно, выбор аксиом должен определяться исключительно математиками и исключительно в перспективе решения стоящих перед ними практических задач. Отрицанием значимости каких-либо философских соображений при обсуждении аксиоматического метода может служить заявление К. Есварана: «действительная роль аксиом состоит в том, чтобы позволить математику сторониться философских дебатов».[2] Как это часто случается, принадлежащие «folk philosophy» идеи не просто игнорируют историю развития излагаемой концепции, но и

[1] Copi 1958, 115.

[2] Easwaran 2008, 385.

существенно искажают ее; и спор об эпистемологическом статусе аксиом является очередным тому подтверждением.

Аксиоматическое представление геометрии Евклидом традиционно считалось превосходным способом организации научного знания, восхищавшим философов и вдохновлявшим их на создание влиятельных программ в области гносеологии. Причем геометрия Евклида явилась именно образцом представления уже известного знания, а не средством его увеличения или же изобретения некоего нового способа установления тех истин, которые иначе не могут быть получены. Процесс концептуализации математики, достигший кульминации к концу XIX в., привел к тому, что математика становится наукой не только о пространстве и разных видах чисел, но и наукой о структурах различного рода, например, о множествах или группах. Современная аксиоматика может рассматриваться как естественное следствие концептуализации математики; исследование структуры предполагает изучение всех ее «воплощений», или инстанциаций, и аксиоматический метод позволяет представить все такие воплощения в качестве моделей системы. Теоретико-модельный подход при этом предполагает, что исследуются не описания структуры, а сама структура. А тот факт, что законы, определяющие ее характеристики, являются законами природы, исключает какие-либо ограничения на сферу применения аксиоматического метода. Применение аксиоматического метода, помимо удобства и изящности, содержит ряд эпистемологически желательных характеристик: «В так понимаемом аксиоматическим методе решающим является то, что аксиоматизированная теория должна отразить все релевантные структуры и только их. Если для некоторой науки сформулирована полная система аксиом, становится возможным исследование феноменов, составляющих предметное содержание этой науки, не проводя наблюдения в лаборатории, а только с помощью карандаша и бумаги».[3] В современном понимании аксиоматического метода, реализуемая посредством его функция обобщения всех релевантных инстанциаций структуры, явно преобладает над уходящем ныне в тень вопросом обоснования системы знания, преобладавшем ранее. Действительно, традиционная идея о том, что аксиоматическая система представления содержания теории – это способ обоснования теории посредством демонстрации того, что устанавливаемые теоремы являются следствиями непроблематичных аксиом, попросту не соответствует современной математической практике. Воспользуемся примером Я. Хинтикки: вряд ли кто-либо согласится с тем, что уравнение Э. Шредингера, выступающее в качестве аксиомы, является непроблематичным утверждением. Математика полна

[3] Hintikka 2001, 71.

примеров систем, в которых устанавливаемые теоремы много проще, чем аксиомы, из которых они выводятся, что является результатом «заинтересованности» в обобщающей функции аксиоматики как системы представления знания.

Но само рождение современного аксиоматического метода было окружено дебатами совершенного иного содержания, касавшихся в первую очередь вопросов обоснования аксиоматической системы и эпистемологических характеристик ее исходных элементов. Мы имеем в виду известную, но далеко еще не полностью изученную, полемику между Г. Фреге и создателем современного аксиоматического метода, Д. Гильбертом. Познакомившись сначала с записями лекций Д. Гильберта, а затем и его знаменитыми «Основаниями геометрии», в которых автор представил впервые строгое аксиоматическое представление геометрии Евклида, а также доказательства независимости и непротиворечивости для нее, Фреге вступил в полемическую переписку с Гильбертом, по итогам которой опубликовал две статьи, представляющие его понимание аксиоматического метода представления знания, содержащее, в том числе, трактовку природы исходных элементов системы.

Обе стороны в споре соглашались с тем, что в дедуктивно конструируемой аксиоматической системе недоказанные, примитивные элементы и допущения должны быть явно установлены; оба были поклонниками идеи полной формализации, позволяющей механически выводить теоремы без какой-либо интерпретации используемых символов. Различие позиций Г. Фреге и Д. Гильберта коренилось в их философских взглядах на природу аксиоматического метода представления знания. Проект Г. Фреге коренился в его философском анализе понятия числа, который привел его к использованию формализации для демонстрации правильности предложенного анализа. Интерес Д. Гильберта восходил к математической проблеме конструирования непротиворечивой аксиоматизации геометрии, и именно решение этой задачи обусловило его философские построения. Центральной проблемой полемики оказался статус аксиом: на каких основаниях мы можем верить в них, если в аксиоматизируемой теории они не могут быть доказаны? Позиция Г. Фреге заключалась в том, что, действительно, во избежания круга в доказательстве, мы должны некоторые утверждения принять без доказательства в качестве истинных. Но их истинность при этом должна быть установлена без обращения к аксиоматизируемой теории. Так, в случае евклидовой геометрии, источником истинности аксиом для Г. Фреге выступает кантовская интуиция: она обеспечивает два необходимых условия для признания утверждения в качестве аксиомы, которые выдвигает Фреге: истинность и очевидность. То есть, согласно Г. Фреге, мы не имеем права произвольно выбрать набор теорем теории и объявить их аксиомами на том основании, что их достаточно для выведения всех теорем: выводимость не должна подменять собой истинность и очевидность аксиом. Таким образом, для Г. Фреге аксиомы представляют собой истинные мысли (понимаемые в духе платонизма, как сущности, не сводимые к субъективным ментальным состояниям). Как он выразился в письме к Д. Гильберту, аксиомы «не должны включать в себя слова или знаки, чьи референция и значение, или же, чей вклад в выражение мысли, не были полностью установлены, настолько, что не осталось сомнения в значении пропозиции, выраженной мыслью. Единственно, может оставаться вопрос об истинности этой мысли и о том, на чем она основана».[4] Установление истинности аксиом становится центральной задачей. Для Г. Фреге было два источника истинности математических утверждений: логическая истинность, присущая математике, и геометрическая интуиция, обосновывающая геометрию. Аксиомы последней, согласно ему, «истинны, хотя и не доказаны по причине того, что знание их проистекает из совершенно другого источника, нежели знание логики. Из источника, который можно назвать интуицией пространства».[5]

Здесь определения играют центральную роль. Прежде всего, они устанавливают референцию терминов: «Я разделю математические выражения на определения и все остальные (аксиомы, основные законы, теоремы). Каждое определение содержит символ (выражение или слово), у которого прежде не было референции, и которое приобретает ее только посредством определения».[6] Здесь понятной становится основополагающая роль определения для установления истинности аксиом. Г. Фреге определяет эту функцию как функцию разъяснения: «[Разъяснение] позволяет ученым понимать друг друга. Его нужно рассматривать в качестве части пропедевтики. Ей нет места в системе науки; никакие выводы не могут на нем основываться. Любой, кто желает вести исследования для себя самого, не нуждается в нем. Обращаясь к ней по доброй воле, достигая намеков и начального понимания, потому что без использования метафор мы никогда ничего не получим. Но следует требовать от того, кто проясняет, чтобы он определенно знал, что он подразумевает и чтобы он всегда был готов к тому, чтобы в случае возникновения непонимания сделать свое разъяснение более полным и совершенным».[7]

[4] Frege 1971, 10.
[5] Frege 1971, 16.
[6] Frege 1971, 27.
[7] Frege 1971, 45.

Аксиоматика Евклида может служить прообразом проекта обоснования аксиоматизации геометрии, разрабатывавшегося Г. Фреге. Мы не утверждаем того, что Фреге «просмотрел» реализацию своего проекта Евклидом. Хорошо известно, что определения Евклида он критиковал, как, впрочем, аксиомы и определения Д. Гильберта. Но критика эта касается исключительно формулировок; на наш взгляд, идея Г. Фреге о том, что одной из основополагающих функций определения в аксиоматизации геометрии является функция прояснения, которую следует понимать в эпистемологическом смысле, а не в смысле жанровой манеры речи, может прояснить роль определений в системе Евклида. *Начала* Евклида действительно пестрят «определениями». Так, Р. Нетц насчитал 273 определения. Предлагая их следующую классификацию и настаивая на том, что в случае формулировок Евклида, «сложно разделить логическую и синтаксическую форму», он отмечает, что в случае Евклида, совершенно не понятно, какой цели служат эти «определения», не являясь «ни сокращениями, ни объяснениями».[8] Тщательно анализируя введение Евклидом определения, Р. Нетц приходит к выводу о том, что «большая часть определений не устанавливает эквивалентности выражений. Они специфицируют ситуацию, в случае которой обсуждаемые свойства принадлежат объектам. Как мы видели, большая часть определений представляет собой просто прозаическое введение ...Прежде чем приступить к работе, математик описывает, что он делает, вот и все ...В общем, мы должны относиться к определениям в греческой математике как к принадлежащем дискурсу *о* математике – дискурсу, в котором математик встречает не-математика – дискурсу, не имеющим равным счетом никакого значения для доказательства».[9]

Нам кажется, заключение Р. Нетца о роли определений в аксиоматической системе геометрии Евклида может быть скорректировано в свете идей Г. Фреге. Большая часть определений Евклида служит именно той цели, которую Г. Фреге определил как *разъяснение*. Фреге, безусловно, различает определения и разъяснения (хотя и оставляет последние без точной характеристики, довольствуясь общими интуитивными соображениями). Для него определения являются неотъемлемой частью аксиоматической системы, тогда как разъяснения выходят за ее пределы, оставаясь, тем не менее, необходимым условием для дальнейшей формулировки определений и аксиом, а следовательно – элементом обоснования аксиоматики. Именно этим, на наш взгляд, нужно объяснять безжалостную критику определений Евклида Г. Фреге: они не выдерживают критики в качестве элемента аксио-

[8] Netz 1999, 91.

[9] Netz 1999, 95–96.

матической теории, но могут выполнять функцию разъяснения, являющуюся необходимым эпистемологическим условием обоснованности аксиоматической теории.

Библиография

Copi, I. (1958) "Artificial languages," in Henle 1958, 96–120.

Easwaran, K. (2008) "The role of axioms in mathematics," *Erkenntnis* 68, 381–391.

Frege, G. (1971) *On the Foundation of Geometry and Formal Theories of Arithmetic.* Yale University Press.

Henle, P., ed. (1958) *Language, Thought, and Culture.* University of Michigan Press.

Hintikka, J. (2011) "What is the axiomatic method?" *Synthese* 183, 69–85.

Netz, R. (1999) *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge University Press.