ЕВКЛИДОВ КОРПУС
ДЕЛЕНИЕ КАНОНА

А. И. Щетников

Центр образовательных проектов ΣΙΓΜΑ, Новосибирск
schetnikov@ngs.ru

THE EUCLIDEAN *SECTIO CANONIS*

Introduction, Russian translation and notes by Andrey Schetnikov
(ΣΙΓΜΑ. The Centre of Educational Projects, Novosibirsk, Russia)

ABSTRACT: Although a work of several hands, rather then of Euclid (active around 300 BCE), this short treatise (an introduction and 20 propositions formulated in the manner of theorems, preserved independently and, partially and slightly differently, in Porphyry and Boethius), is counted among the most important writings on ancient mathematical harmonics. The central part of the treatise could indeed be written by the great mathematician himself, undoubtedly, on the basis of the works of early authors, such as Archytas, while the rest, esp. the introduction, is admittedly a later addition. Despite few logical incontinences, the treatise as a whole is a unique early attempt at the composing of a systematic mathematical harmonics, based both on the empirical observations and an intrinsic logic of the division of the musical *kanon*. The treatise is translated into the Russian for the first time.

KEYWORDS: Axiomatic method, harmonics, musical intervals, concords and ratios, musical instruments

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Авторство трактата

Небольшой трактат *Деление канона* (Τῇ τοῦ κανόνος κατατομῇ, *Sectio canonis*), в котором излагается пифагорейская теория музыкальных интервалов, традиционно входит в корпус сочинений Евклида.

До наших дней дошло 32 рукописи *Деления канона*. Во всех этих рукописях, за исключением одной, этот трактат соединён с ещё одним сочинением по теории музыки, *Гармоническим введением*, которое ныне принято приписывать Клеониду. В 20 рукописях из этих 32 *Деление канона* приписывается Евклиду. На авторство Евклида указывает Порфирий, приводящий текст первых 16 предложений трактата в *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* (98.14–103.25).

Впрочем, принадлежность Евклиду этого сочинения является спорной. Во всяком случае, большая часть материала *Деления канона*, как показал Б. Л. Ван дер Варден, восходит к выдающемуся пифагорейскому математику Архиту Тарентскому. *Деление канона* ссылается на 7 и 8 предложения VIII книги *Начал* Евклида и по этой причине может считаться составленным после *Начал*; однако, согласно Ван дер Вардену, VIII книга *Начал* была составлена Архитом и включена затем Евклидом в *Начала* без существенных изменений. Тексты Птолемея и Боэция, прямо ссылающихся в связи с изложенным в *Делении канона* материалом на пифагорейцев вообще и Архита в частности, приведены в Приложении.

Структура трактата

Деление канона достаточно естественно разделяется на три относительно независимые части. В коротком введении излагается физическая теория возникновения звуков посредством удара и движения. Высокие звуки возникают из-за более частых ударов, низкие – из-за более редких.

За введением следуют основные 16 предложений трактата. В предложениях 1–9 излагается общая математическая теория кратных и сверхчастных интервалов, которая применяется затем в предложениях 11–16 к музыкальным интервалам. Венчают эту часть утверждения о том, что октава больше шести тонов, и о том, что тон не делится ни на два, ни на большее число равных интервалов, выражающихся числами. Автор пытается вывести все свои утверждения, исходя из чистого умозрения и сведя к минимуму опытный базис теории. Эта попытка оборачивается грубой логической ошибкой, допущенной в 11 предложении. Впрочем, итоговые положения пифагорейской теории от этого не страдают, только доводы оказываются не во всём состоятельными.

В завершающих четырёх предложениях трактата излагается принцип настройки «наилучшей неизменной системы» по чистым квинтам и квартам путём деления линейки – по этим предложениям получил своё название и весь трактат.

Текст и перевод

Перевод осуществлён по изданию Sectio canonis, ed. H. Menge, *Euclidis opera omnia*, vol. 8. Leipzig: Teubner, 1916, s. 158–180. См. также английские переводы в книгах *Greek musical writings II,* transl. A. Barker. Cambridge Univ. Press, 1989, p. 190–208 и *Sectio canonis. The Euclidean Division of the canon: Greek and Latin Sources,* transl. A. Barbera. Lincoln: Nebraska UP, 1991.

ЛИТЕРАТУРА

Barker, A. D. (1981) «Methods and aims in the Euclidean ‘Sectio Canonis’». *Journal of Hellenic Studies*, 101: 1–16.

Bowen, A. C. (1991) «Euclid’s ‘Sectio canonis’ and the history of pythagoreanism», in *Science and philosophy in classical Greece*. New York: Garland: 167–187.

Levin, F. R. (1990) «Unity in Euclid’s ‘Sectio Canonis’», *Hermes*, 118**:** 430–443.

Mathiesen, J. T. (1999) *Apollo’s lyre: Greek music and music theory in antiquity and the Middle Ages*. Univ. of Nebraska Press.

van der Waerden, B. L. (1943) «Die Harmonielehre der Pythagoreer», *Hermes*, 78**:** 163–199.

ДЕЛЕНИЕ КАНОНА

Введение

Если бы были покой и неподвижность, была бы тишина. А если бы была тишина и не было движения, никто бы ничего не услышал. Поэтому чтобы что-то услышать, прежде должны возникнуть удар и движение.[1] Так как все звуки возникают от некоего удара, а удар не мог бы случиться без предшествующего движения, из движений же одни более плотные, а другие более разреженные, и от более плотных получаются более высокие голоса, а от более разреженных – более низкие, то по необходимости одни будут более высокими, поскольку они составляются из более плотных и многочисленных движений, а другие – более низкими, поскольку они складываются из более разреженных и малочисленных движений. Слишком высокий голос спускают до нужного отнятием движения; слишком низкий голос напрягают до нужного прибавлением движения. Поэтому можно сказать, что голоса составлены из частей, так как они достигают нужного путём прибавления и отнятия.[2] Но всё состоящее из частей относится одно к другому как числа, так что голоса по необходимости

---

[1] Здесь излагается общее пифагорейское представление о природе звука. Порфирий в *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* (30_7) передаёт следующую фразу, приписываемую Пифагору и дошедшую до него через цепочку сообщений Ксенократа и Гераклида Младшего: «Если кто-нибудь захочет из равенства услышать что-либо созвучное, то должно возникнуть некоторое движение». Об ударе как источнике всякого звучания речь идёт в первом фрагменте Архита.

[2] Именно в этом месте древнее пифагорейское воззрение «всё есть число» выражено наиболее отчётливым образом. Автор не проводит различий между дискретным изменением, которое идёт путём добавления и отнятия порций, и непрерывным изменением, проходящим последовательно через все градации данной переменной величины. При непрерывном изменении переменная величина пробегает как соизмеримые с исходной ступенью значения, так и несоизмеримые, которые уже не могут быть выражены отношением натуральных чисел.

относятся друг к другу как числа. Числа же относятся либо в многократном отношении, либо в сверхчастном, либо в сверхмногочастном,[3] так что и голоса по необходимости имеют между собой такие же отношения. И по этому отношению между собой они именуются кратными и сверхчастными.

Мы знаем, что одни голоса являются созвучными, а другие разнозвучными, и что созвучные голоса сливаются друг с другом, так что одно возникает из обоих, а разнозвучные нет. И для созвучных голосов, где одно [звучание] возникает из обоих слиянием звуков, каждое созвучие называется по отношению чисел, либо кратному, либо сверхчастному.[4]

Предложение 1

Если составной интервал образуется удвоением кратного интервала, то этот интервал будет кратным.

Пусть будет интервал ВГ, и пусть В к Г будет кратным. Сделаю, чтобы было как Г к В, так и В к Δ. Я утверждаю, что Δ к Г является кратным. Ведь поскольку В к Г является кратным, Г измеряет В. И поскольку как Г к В, так и В к Δ, тем самым Г измеряет Δ. Тем самым Δ к Г является кратным.

Предложение 2

Если удвоением интервала образуется кратный составной интервал, то и исходный интервал является кратным.

Пусть будет интервал ВГ. Сделаю, чтобы было как Г к В, так и В к Δ, и пусть Δ к Г будет кратным. Я утверждаю, что В к Г является кратным. Ведь поскольку Δ к Г является кратным, Г измеряет Δ. Но известно, что если числа образуют пропорцию, и первое измеряет последнее, то оно измеряет и промежуточные (*Начала*, VIII, 7).[5] Тем самым Г измеряет В, поэтому В к Г является кратным.

---

[3] Кратные отношения – когда одна величина укладывается в другой целое число раз, сверхчастные – когда одна величина превышает другую на такую часть, которая нацело укладывается в меньшей величине. В словесном выражении этих отношений присутствует указание на одно число (к примеру, трёхкратное либо сверхтретье = превышающее на треть). Все прочие отношения большего числа к меньшему автор называет сверхмногочастными.

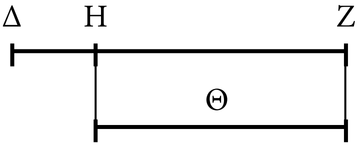
[4] Здесь исподволь вводится базовая гипотеза, на которой основывается значительная часть последующих доказательств: все созвучные интервалы являются либо кратными, либо сверхчастными, прочие же отношения чисел не дают созвучных интервалов. Далее, отнюдь не все кратные и сверхчастные интервалы считались в пифагорейской теории созвучными, но лишь те, у которых входящие в них числа не превышали четырёх. Таким образом, к созвучным относились кратные интервалы октавы 2 : 1, дуодецимы 3 : 1 и двойной октавы 4 : 1, а также сверхчастные интервалы квинты 3 : 2 и кварты 4 : 3.

[5] Ссылки на определения и предложения *Начал* Евклида, а также внутренние ссылки на уже доказанные предложения *Деления канона* расставлены переводчиком.

Предложение 3

В сверхчастном интервале нет ни одного, ни многих средних пропорциональных, выражающихся числом (См. схему ниже).

Пусть имеется сверхчастный интервал ΒΓ. Наименьшими в том же отношении, что и Β, Γ, пусть будут ΔΖ, Θ. Они не имеют общей меры, кроме единицы. Отложим ΗΖ равным Θ; и ΔΖ будет сверхчастным по сравнению с Θ, а их разница ΔΗ будет общей мерой ΔΖ и Θ. Но тогда ΔΗ есть единица, а потому между ΔΖ, Θ нет никаких средних. Ведь они встали бы между большим ΔΖ и меньшим Θ, разнящимися на единицу, а это невозможно. Поэтому они не встают между ΔΖ, Θ. Но сколько средних пропорциональных можно вставить между наименьшими, столько же можно вставить и между всеми, имеющими то же отношение (*Начала*, VIII, 8). А раз их нельзя вставить между ΔΖ, Θ, то их нельзя вставить и между Β, Γ.



Предложение 4

Если некратный интервал составить дважды, то целое не будет ни кратным, ни сверхчастным.

Пусть будет некратный интервал ΒΓ. Сделаю, чтобы было как Γ к Β, так и Β к Δ. Я утверждаю, что Δ к Γ не является ни кратным, ни сверхчастным. Во-первых, пусть Δ к Γ будет кратным. Однако известно, что если удвоением интервала составляется кратный интервал, то и исходный интервал будет кратным (пр. 2). Получается, что Β к Γ является кратным. Но это не так. Поэтому невозможно, чтобы Δ к Γ было кратным. Но оно не может быть и сверхчастным. Ведь в сверхчастный интервал не вставляется среднее пропорциональное (пр. 3). Но в Δ, Γ вставляется Β. Поэтому невозможно, чтобы Δ к Γ было кратным или сверхчастным.

Предложение 5

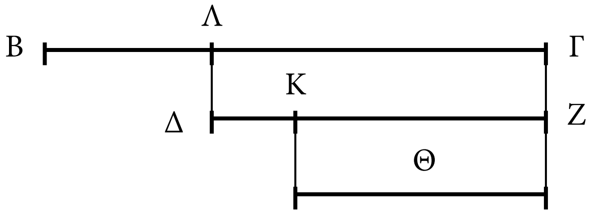
Если удвоением интервала составляется некратный интервал, то и исходный интервал не является кратным.

Пусть будет интервал ΒΓ. Сделаю, чтобы было как Γ к Β, так и Β к Δ, и пусть Δ к Γ не будет кратным. Я утверждаю, что и Β к Γ не будет кратным. Ведь если Β к Γ будет кратным, то и Δ к Γ будет кратным (пр. 1). Но это не так. Поэтому Β к Γ не будет кратным.

Предложение 6

Двукратный интервал составляется из двух наибольших сверхчастных, из полуторного и сверхтретьего.[6]

Пусть ΒΓ будет полуторным к ΔZ, а ΔZ – сверхтретьим к Θ. Я утверждаю, что ΒΓ будет двукратным к Θ. Отложим ZK, равное Θ, и ΓΛ, равное ΔZ. ΒΓ является полуторным к ΔZ, и тем самым ΒΛ является третьей частью от ΒΓ и половиной от ΔZ. И вновь, ΔZ является полуторным к Θ, и тем самым ΔK является четвёртой частью от ΔZ и третьей частью от Θ. Получается, что ΔK будет четвёртой частью от ΔZ, и ΒΛ будет половиной от ΔZ, поэтому ΔK будет половиной от ΒΛ. Но ΒΛ было третьей частью от ΒΓ. Поэтому ΔK будет шестой частью от ΒΓ. Но ΔK было третьей частью от Θ. Поэтому ΒΓ будет двукратным к Θ.



Иначе. Пусть Α будет полуторным к Β, а Β будет сверхтретьим к Γ. Я утверждаю, что Α является двукратным к Γ. Α содержит в себе Β и его половину. Поэтому два Α равны трём Β. Далее, поскольку Β является сверхтретьим к Γ, Β содержит в себе Γ и его треть. Поэтому три Β равны четырём Γ. Но три Β равны двум Α. Поэтому два Α равны четырём Γ. Поэтому Α равно двум Γ. Тем самым Α является двукратным к Γ.

Предложение 7

Двукратный и полуторный интервалы производят трёхкратный интервал.

Пусть Α будет двукратным к Β, а Β будет полуторным к Γ. Я утверждаю, что Α будет трёхкратным к Γ. Поскольку Α является двукратным к Β, Α равняется двум Β. Далее, поскольку Β является полуторным к Γ, Β содержит в себе Γ и его половину. Поэтому два Β равны трём Γ. Но два Β равны Α. Поэтому Α равно трём Γ. Тем самым Α будет трёхкратным к Γ.

Предложение 8

Если из полуторного интервала вычесть сверхтретий интервал, то остаток будет сверхвосьмерным.

Пусть Α превышает Β на половину, и Γ превышает Β на треть; я утверждаю, что Α превышает Γ на восьмую часть. Поскольку Α является полуторным к Β, Α содержит в себе Β и его половину. Тем самым восемь Α равны двенадцати Β. Далее, поскольку Γ является сверхтретьим к Β, Γ содержит в себе Β и его третью часть. Тем самым девять Γ равны двенадцати Β, а двенадцать Β равны восьми

---

[6] Полуторное отношение выражается в числах как 3 : 2, сверхтретье – как 4 : 3.

А. Поэтому восемь А равны девяти Г. Поэтому А равно Г и его восьмой части. Поэтому А является сверхвосьмерным к Г.

Предложение 9

Шесть сверхвосьмерных интервалов больше одного двукратного интервала.

Пусть А есть некое число. И пусть В будет сверхвосьмерным к А, Г – сверхвосьмерным к В, Δ – сверхвосьмерным к Г, Е – сверхвосьмерным к Δ, Z – сверхвосьмерным к Е, Н – сверхвосьмерным к Z. Я утверждаю, что Н к А будет больше двукратного интервала. Найдём семь сверхвосьмерных друг к другу чисел, которые суть А, В, Г, Δ, Е, Z, Н, положив А равным 262144, В равным 294912, Г равным 331776, Δ равным 373248, Е равным 419904, Z равным 472392, Н равным 5341441; и вот Н к А больше двукратного интервала.

Предложение 10

Интервал октавы является кратным.

Пусть *нета высших* будет А, *меса* – В, *прослямбаномен* – Г.[7] И вот интервал двойной октавы АГ по своему бытию является созвучным. Значит он является или сверхчастным, или кратным.[8] Но сверхчастным он не является: ведь в

---

[7] Начиная с этого предложения, автор оперирует названиями нот так называемой «большой неизменной системы», охватывающей две октавы. Полное её построение описано в пр. 19 и 20. Описание её приводится во многих более поздних трактатах по гармонии, в частности, в принадлежащем Клеониду *Введении в гармонику* (4_{1-19}).

Меса (собственно «средняя») – это срединная нота системы, общая для верхней и нижней октав. Каждая из двух октав в направлении сверху вниз состоит из двух тетрахордов объёмом в кварту и дополнительного нижнего тона. В верхней октаве это тетрахорды высших и разделённых, в нижней октаве – тетрахорды средних и нижних. При подъёме вверх от месы верхние ноты тетрахордов называются нетами («верхними»); при спуске вниз от месы нижние ноты тетрахордов называются гипатами («нижними»). Прослямбаномен («добавленная») – самая нижняя нота системы, добавленная тоном ниже гипаты нижних. При спуске сверху вниз вторые по порядку ноты двух верхних тетрахордов называются паранетами («прилежащими к нете»), а третьи по порядку ноты – тритами. При этом нижняя нота тетрахорда разделённых называется парамесой. При подъеме снизу вверх вторые по порядку ноты двух нижних тетрахордов называются парипатами («прилежащими к гипате»), а третьи по порядку ноты – лиханос («играемыми указательным пальцем»).

Кроме рассмотренных четырёх тетрахордов вводится также тетрахорд соединённых, нижней нотой которого является меса. Соответственно нета соединённых оказывается паранетой разделённых, паранета соединённых – тритой разделённых, трита соединённых – парамесой.

[8] Именно здесь используется базовая гипотеза теории: все созвучные интервалы являются либо сверхчастными, либо кратными. Надо заметить, что сама эта гипотеза конечно же не является чисто умозрительной, но обобщает некоторый предварительный опыт, из которого уже известно, какие числовые интервалы каким созвучиям соответствуют.

сверхчастный интервал не вставляется среднее пропорциональное (пр. 3). Значит он является кратным. Но тогда два <равных> интервала АВ, ВГ составлением дают кратное целое, и тем самым АВ является кратным (пр. 2).

Предложение 11

Каждый из интервалов кварты и квинты является сверхчастным.

Пусть *нета соединённых* будет А, *меса* – В, *гипата средних* – Г. И вот интервал двойной кварты по своему бытию является разнозвучным. Значит он не является кратным.[9] И два равных интервала АВ, ВГ составляют целое, которое не является кратным, значит и АВ не является кратным (пр. 5). Но он является созвучным; следовательно, сверхчастным. И такое же доказательство даётся для квинты.[10]

Предложение 12

Интервал октавы является двукратным.

Уже показано, что он является кратным (пр. 10). Значит, он является либо двукратным, либо большим двукратного. И показано также, что двукратный интервал составляется из двух наибольших сверхчастных (пр. 6), поэтому если октава будет более чем двукратна, то она не составится из двух сверхчастных, но лишь из большего их количества. Однако она составляется из двух созвучных интервалов, из квинты и кварты, поэтому октава не более чем двукратна. Значит, она будет двукратной.

И вот теперь октава является двукратным интервалом (пр. 12), а двукратный интервал составляется из двух наибольших сверхчастных, и октава составляется из полуторного и сверхтретьего интервалов, каковые суть наибольшие (пр. 6). Но она составляется из квинты и кварты, являющихся сверхчастными (пр. 11). Поэтому квинта, которая больше, будет полуторной, а кварта – сверхтретьей.

И ясно, что интервал квинты и октавы [11] будет трёхкратным. Ведь показано, что двукратный и полуторный интервалы производят трёхкратный интервал (пр. 7). Так что интервал октавы и квинты будет трёхкратным. А двойная октава является четырёхкратной. Доказательство дано теперь для всех созвучий, и в их определениях содержатся [отношения] охватывающих голосов друг к другу.

Предложение 13

Осталось разъяснить о тоновом интервале, что он является сверхвосьмерным.

---

[9] В этом доказательстве допущена грубая логическая ошибка: из предположения о том, что все созвучные интервалы являются кратными либо сверхчастными, отнюдь не следует обратное утверждение о том, что все кратные и сверхчастные интервалы являются созвучными.

[10] В доказательстве для квинт можно рассматривать нету разделённых, месу и диатон нижних.

[11] В современной терминологии – дуодецима.

Уже показано, что когда из полуторного интервала вычитается сверхтретий интервал, остаток будет сверхвосьмерным (пр. 8). И вот из квинты вычитается кварта, и остатком является тоновый интервал; значит, тоновый интервал является сверхвосьмерным.

Предложение 14

Октава меньше шести тонов.

Уже показано, что октава является двукратной (пр. 12), а тон – сверхвосьмерным (пр. 13). Но шесть сверхвосьмерных интервалов больше одного двукратного (пр. 9). Поэтому октава меньше шести тонов.

Предложение 15

Кварта меньше двух тонов и полутона, и квинта меньше трёх тонов и полутона.

Пусть *нета разделённых* будет B, *парамеса* – Г, *меса* – Δ, *гипата средних* – Z. Итак, интервал ГΔ является тоном, BZ – октавой, меньшей шести тонов. А оставшиеся равные BГ и ΔZ будут [вместе] меньше пяти тонов. Поэтому один BГ меньше двух тонов и полутона, и он является квартой, и BΔ меньше трёх тонов и полутона, и он является квинтой.

Предложение 16

Тон не делится ни на два, ни на большее число равных.

Уже показано, что он является сверхчастным (пр. 13). Но в сверхчастный интервал не вставляются ни одно, ни много средних пропорциональных (пр. 3). Поэтому тон не делится на равные.

Предложение 17

Паранеты и *лиханос* настраиваются по созвучным интервалам.[12]

Пусть меса будет B. Подниму кварту до Г, и от Г опущу квинту до Δ. Получится тон BΔ. Теперь от Δ подниму кварту до E, и от E опущу квинту до Z. Получится тон ZΔ и дитон ZB. Поэтому *лиханос* будет Z. Подобным же образом настраиваются и *паранеты*.

Предложение 18

Парипаты и *триты* не делят *пикнон* на равные.[13]

---

[12] В предложениях 16–17 речь идёт о *энгармоническом строе*, когда второй сверху голос тетрахорда (паранета либо лиханос) опущен по отношению к верхнему голосу на два тона.

[13] *Пикнон* («плотное») – в энгармоническом строе интервал между гипатой и лиханос, равный разнице кварты и дитона. Внутри этого интервала размещается второй снизу голос тетрахорда (парипата либо трита). В целом предложение следует сформулировать так: «Если парипаты и триты образуют рациональные отношения с другими голосами энгармонического строя, то они не делят пикнон на равные».

Пусть *меса* будет B, *лиханос* – Γ, *гипата* – Δ. Опущу от B квинту до Z. Получится тон ZΔ. И от Z подниму кварту до E. Интервалы ZΔ и BE будут по тону. Присоединю общее ΔΓ. И вот ZE равно ΔB. Но ZE – это кварта, и в ZE не вставляется среднее пропорциональное: ведь этот интервал сверхчастный (пр. 3). Но ΔB равно ZE: поэтому в ΔΓ не вставляется среднее, а оно находится от *гипаты* в сторону *лиханос*. Стало быть, *парипата* не делит *пикнон* на равные. Подобным же образом не делит и *трита*.

Предложение 19

Разделением канона получается наилучшая неизменная система.[14]

Пусть канон делит струну AB по длине на четыре равные части в Γ, Δ, E. Тогда BA издаёт самый низкий голос. AB будет сверхтретьим к ΓB, так что ΓB созвучно с AB в кварту на повышение. Пусть AB – это *просламбаномен*; тогда ΓB – это *диатон нижних*. Далее, AB будет двукратным к BΔ, и они созвучны в

---

[14] В предложениях 18–19 речь идёт о *диатоническом строе*, когда второй сверху голос тетрахорда опущен по сравнению с верхним голосом на тон (и поэтому автор называет его просто «диатон»), а второй снизу – ещё на тон.

октаву, так что ВΔ – это *меса*. Далее, АВ будет четырёхкратным к ЕВ, так что ЕВ – это *нета высших*. ΓВ делится пополам в Z. ΓВ будет двукратным к ZB, и ΓВ созвучна в октаву с ZB; тогда ZB – это *нета соединённых*. Из ΔВ удаляется третья часть ΔН. ΔВ будет полуторным к НВ, и они созвучны в квинту; тогда НВ – это *нета разделённых*. НВ продлевается на равное НΘ, и ΘВ созвучна в октаву с НВ; поэтому ΘВ будет *гипатой средних*. От ΘВ отнимается третья часть ΘК. ΘВ будет полуторным к КВ, поэтому КВ будет *парамесой*. КВ продлевается на равную ΛК, что даёт *гипату нижних* ΛВ. Так с помощью линейки определяются все голоса неизменной системы.

Предложение 20

Прочее получается тем же путём.

ЕВ делится на восемь частей, и к ней прилагается одна часть ЕМ, так что МВ и ЕВ производят сверхвосьмерной интервал. Далее, МВ делится на восемь частей, и к ней прилагается одна часть NМ, поэтому NВ будет тоном ниже ВМ, как и МВ с ВЕ, тогда NВ – это *трита высших*, а МВ – *диатон высших*. Третья часть от NВ приставляется к ней как NΞ, так что ΞВ, будучи сверхтретьей к NВ, созвучна с ней в кварту на понижение, тем самым ΞВ – это *трита разделённых*. Далее, половинная часть ΞВ приставляется к ней как ΞО, так что ОВ созвучна в квинту с ΞВ; тем самым ОВ – это *парипата средних*. Затем ΞО продлевается на равную ОП, что даёт *парипату нижних* ПВ. И от ВΓ отнимается четвёртая часть ΓР, что даёт *диатон средних* РВ.

* * *

Приложение 1. Птолемей, *Гармоника* I, 5

Восприятие признает следующие созвучия: так называемые кварту и квинту, разность между которыми называется тоном, затем октаву, октаву и кварту, октаву и квинту, а также двойную октаву. Интервалы большие этих мы для нашей настоящей задачи оставим в стороне. Пифагорейская теория из упомянутых интервалов оставляет в стороне также октаву и кварту в соответствии с особенными гипотезами, которые были выставлены главами этой школы из следующих соображений. Исходным началом их метода является то, что равные числа сопоставляются с голосами равного напряжения, неравные же – с голосами неравного напряжения. Далее они говорят, что как существуют два вида голосов разного напряжения – созвучные и разнозвучные, из которых прекраснейшие – созвучные, так и среди неравных чисел различаются два главных рода отношений, во-первых – превышающие на несколько частей, где число относится к числу,[15] во-вторых, сверхчастные и кратные. Более предпоч-

---

[15] «Число относится к числу» – в том смысле, что в определении такого интервала указываются по имени два числа, например, восемь к трём. Во отличие от этого случая, в име-

тительными вследствие простоты сравнения являются последние, так как для сверхчастных избыток является некоторой частью целого, а в кратных меньшее содержится в большем. Поэтому они сопоставляют сверхчастные и кратные отношения с созвучиями: октаву они выражают как двукратное отношение, квинту – как полуторное, кварту – как сверхтретье. Путём рассуждения устанавливается, что прекраснейшим из созвучий является октава, а лучшим из отношений – двукратное; первая потому, что она ближе всего к равенству напряжений, а второе потому, что только в нём избыток равен превышаемому. Далее, октава составляется из двух последовательных и первых созвучных интервалов – квинты и кварты, а двукратное отношение – из двух последовательных и первых сверхчастных, а именно полуторного и сверхтретьего. Поскольку сверхтретье отношение меньше полуторного, то и созвучие кварты будет меньше квинты, так что их разность или тон стоит в сверхвосьмерном отношении; ведь настолько полуторное отношение превосходит сверхтретье. В соответствии с этим они причисляли к созвучным интервалам также октаву и квинту, взятые в их совместной величине, и двойную октаву, так как последняя соответствует четырёхкратному отношению, а первая – трёхкратному. А октаву и кварту они не причисляли к созвучиям, так как ей соответствует отношению восемь к трём, которое не является ни сверхчастным, ни кратным.

Они добились этого и при помощи более геометрического способа. Пусть будет квинта АВ и вслед за ней другая квинта ВГ, так что АГ будет двойной квинтой. Поскольку двойная квинта не является созвучной, то и АГ не будет двукратной, поэтому и АВ не кратна, но она созвучна: следовательно, квинта сверхчастна. Подобным же образом они доказывают, что кварта, которая меньше квинты, тоже сверхчастна. Теперь, говорят они, пусть будет октава АВ и вслед за ней другая октава ВГ, так что АГ будет двойной октавой. Так как двойная октава будет созвучной, то АГ будет или сверхчастным, или кратным. Но оно не может быть сверхчастным, ибо в него не вставляется среднее пропорциональное; следовательно, АГ, а значит и АВ, будут кратными; поэтому октава кратна. Отсюда они заключают, что октава двукратна, квинта полуторна и кварта сверхтретья. Ведь из кратных отношений только двукратное составляется из двух наибольших сверхчастных, ибо два любых других сверхчастных, составленные вместе, будут меньше двукратного, а двукратное – наименьшее из кратных; тон же в соответствии с этим будет сверхвосьмерным. Они показывают, что полутон является неблагозвучным, поскольку он как среднее пропорциональное делит пополам сверхчастное отношение, а таковое в сверхчастном является неблагозвучным.[16]

нах кратных и сверхчастных интервалов участвует только одно число, например, восьмикратный для кратного или «превышающий на восьмую часть» для сверхчастного.

[16] Изложение Птолемея конспективно охватывает материал первых 16 предложений *Деления канона*.

Приложение 2. Боэций, *Музыкальное наставление* III, 11

В сверхчастное отношение невозможно вставить среднее пропорциональное число. Доказательство, которое даёт Архит, слишком слабое. Оно таково. Пусть имеется сверхчастное отношение *A*, *B*. Свожу его к отношению наименьших *C*, *DE*. Следовательно, так как *C* и *DE* – наименьшие в этом отношении и сверхчастные, то число *DE* превосходит число *C* на одну их общую часть. Назовём её *D*. Я утверждаю, что *D* будет не числом, а единицей. Действительно, если *D* – число и часть от *DE*, то тогда число *D* будет измерять число *DE*, а тем самым и число *E*. Тем самым оно будет измерять *C*. Следовательно, число *D* будет измерять оба числа *C* и *DE*, что невозможно. Ибо наименьшие из всех чисел, находящиеся в сверхчастном отношении, первые между собой и различаются только на единицу. Следовательно, *D* – единица. Следовательно, число *DE* превосходит число *C* на единицу. Поэтому между ними невозможно вставить никакое число, которое было бы их средним пропорциональным. Отсюда следует, что и между числами, которые находятся в том же отношении, невозможно вставить среднее пропорциональное число.[17]

Приложение 3. Аристотелевский корпус, *Проблемы* XIX, 41

Почему двойная квинта и двойная кварта не являются созвучными, а двойная октава является? Не потому ли, что квинта имеет полуторное отношение, а кварта – сверхтретье? Но в полуторной или сверхтретьей последовательности трёх чисел крайние члены не имеют между собой ни сверхчастного, ни кратного отношения. Ну а октава имеет двукратное отношение, и если её удвоить, то крайние члены будут иметь четырёхкратное отношение друг к другу. И если созвучие является отношением голосов друг к другу, и голоса в интервале двойной октавы имеют друг к другу отношение, а в двойной кварте и двойной квинте не имеют, то двойная октава будет созвучной, а прочие нет, согласно объявленному выше.

---

[17] Этот фрагмент у Боэция является прямым пересказом Предложения 3 *Деления канона*. Сам Боэций ссылается на Архита, какой-то музыкальный трактат которого мог быть ему доступен прямо или в чьём-то пересказе. Возможно, что *Деление канона* как раз и являлось этим трактатом.