

ПИРРОНОВСКИЙ СКЕПТИЦИЗМ И ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

В. В. ЦЕЛИЩЕВ

Новосибирский государственный университет
Институт философии и права Сибирского отделения РАН
leitval@gmail.com

VITALY TSELISHCHEV

Novosibirsk State University, Institute of Philosophy and Law, Novosibirsk, Russia

PYRRHONIAN SKEPTICISM AND GÖDEL'S SECOND INCOMPLETENESS THEOREM

ABSTRACT. The article compares the Pyrrhonian skepticism with the interpretations of Gödel's Second Theorem as a skeptical challenge in modern mathematics. It is shown that the epistemological framework of Gödel's restrictive theorems fits into the skeptical reflection scheme of Sextus Empiricus.

KEYWORDS: Sextus Empiricus, *isostheneia*, Gödel, Second incompleteness theorem, consistency, metamathematics, intensionality.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект «Базовая логика, ограничительные результаты и системы формализации знания», грантовое соглашение п. 16-18-10359.

Ни один из результатов математической логики не стал предметом такого множества спекуляций и неверных интерпретаций, как Вторая теорема Гёделя о неполноте. Убедительным свидетельством неуместного цитирования и нерелевантных ссылок является следующий критический пассаж видного английского философа С. Блэкберна:

Видные интеллектуалы в области литературы часто оперируют технической терминологией математической логики или философии языка. Один мой друг слышал как-то разговор в Кембридже по поводу Деррида, присуждение которому почетной степени вызвало серьезное сопротивление джентльменов. Журналист, освещающий возникший скандал, спросил Видного Литературного Интеллектуала, в чем состоит важность Деррида. «Ну, – сказал тот со снисходительной нагло-

стью, – Гедель показал, что любая теория противоречива, если у нее нет поддержки извне, а Деррида показал, что этого извне нет». Здесь есть по крайней мере три примечательных вещи. Во-первых, того, что якобы сделал Гедель, вообще не может быть, поскольку существует весьма много непротиворечивых теорий. Во-вторых, Гедель на самом деле не доказывал, что любая теория противоречива, и не пытался доказать. В-третьих, не имеет смысла говорить, что противоречивая теория могла бы стать непротиворечивой, будучи «поддержанной извне», что бы это ни значило. Так что то, что Деррида якобы сделал, так же невозможно, как и невозможно то, что якобы сделал Гедель.

Такие ошибки приводят к провалу на экзамене по философии или логике на первом курсе. Однако это обстоятельство не производит особого впечатления в мире Видных Литературных Интеллектуалов. В их мире простое упоминание Геделя, подобно типичному заклинанию типа «иерархий» и «метаязыков» создает впечатление чего-то страшно глубокого и страшно научного. Это придает Видному Интеллектуалу образ человека, которому по плечу самые трудные и глубокие проблемы. Я полагаю, журналист упал в обморок.¹

Это крайний вариант постмодернистского осмысления метаматематического результата, но более тонкие ассоциации Второй теоремы Геделя с постмодернизмом не лишены внешней правдоподобности. Вторая теорема говорит о недоказуемости арифметических истин, и в этом смысле переключается в какой-то мере с постмодернизмом. Т. Инглтон так характеризует его:

Постмодернизм есть стиль мысли, полный подозрений относительно классических понятий истины, разума, идентичности и объективности, идеи универсального прогресса или эмансипации, единого каркаса, великих нарративов или окончательных оснований объяснения. Он видит мир контингентным, лишенным оснований, дифференцированным, неустойчивым, неопределенным, как множества разьединенных культур или интерпретаций, которые порождают изрядный скептицизм в отношении объективной истины, истории и норм, данности природы и совместимости тождеств.²

Фактически, постмодерн предлагает скепсис в отношении достижений модерна, в данном контексте в первую очередь в отношении определенности знания. Именно такая ситуация усматривается в современной математике, что хорошо выражено в названии известной книги М. Клайна.³ Наличие многих, несовместимых между собой систем оснований математики, создает «постмодернистскую» ситуацию, в которой скептическая позиция в отношении знания проявляется также в названии важнейших результатов

¹ Blackburn 2000, 50–51.

² Eagleton 1996, vii–viii.

³ Клайн 1984.

Геделя и Гарского как «ограничительных теорем». Что касается этих «ограничений», то наиболее характерное из них усматривается именно во Второй теореме Геделя.

G₂ есть сердцевина скептической интерпретации геделевских результатов. Скептицизм этого рода ... представляет вид антифундаментализма. Им утверждается, что невозможность доказательства непротиворечивости непротиворечивой формальной системы внутри самой системы влечет неизбежную неопределенность для работающего математика: мы никогда не можем быть уверены, что формальная система, с которой мы работаем, непротиворечива. Некоторые даже утверждают, что ввиду Второй теоремы о неполноте, «если чуть-чуть преувеличить, непротиворечивость таких систем как Пеановская Арифметика или даже Арифметика Робинсона должна быть принята на веру».⁴ Определенность и вера есть эпистемические факты, и скептические интерпретации G₂ представляют собой декларации эпистемического отчаяния.⁵

Отзвук такого отчаяния прекрасно передан в известном афоризме математика Андре Вейля, согласно которому Бог существует, потому что математика непротиворечива, а Дьявол существует, потому что мы не можем доказать ее. Религиозные коннотации здесь могут лишь указать на то, что философские следствия Второй теоремы о неполноте вышли на уровень таких обобщений, которые вызывают к классическим проблемам соотношения догматизма и скептицизма, восходящим к античности. И действительно, Дж. Кадвани полагает, что

...Классический пирроновский скептицизм обеспечивает аналогию между истинно анархистскими теориями познания и следствиями геделевских результатов. Геделевская работа имеет скептическую сердцевину, которая разработана у Пиррона в виде словаря «критериев» и «стандартов».⁶

Эти термины напрямую соотносятся с понятиями критерия математической истины и стандартами математического доказательства. Помещение проблемы соотношения этих понятий в контекст пирроновского скептицизма вполне уместно, если принять во внимание следующий пассаж из Секста Эмпирика:

...дело в том, что и доказательство всегда нуждается в критерии, чтобы быть твердым, и критерий в доказательстве, чтобы казаться правильным, и не может быть правильного доказательства, если ему не предшествует правильный критерий, равно как и правильного критерия не может быть без того, чтобы быть

⁴ Dunn 1987, 161.

⁵ Berto 2009, 164.

⁶ Kadvani 1989, 164.

заранее уверенным, что он снабжен доказательством. Таким образом, и доказательство, и критерий попадают в заколдованный круг тропа взаимодоказуемости, в котором и то, и другое оказывается недостоверным, ибо каждое, ожидая подтверждения через другое, становится недостоверным подобно другому.⁷

Доказательство, о котором может идти речь в случае Второй теоремы Гёделя, это конечно же доказательство непротиворечивости формальной системы. Гёдель, показав, что при определенных условиях это доказательство невозможно, оказался, по мысли Кадвани, в рядах скептиков пирроновского толка. Сам по себе интерес к такой интерпретации гёделевского результата состоит в том, что древняя полемика догматика и скептика может быть помещена в точный контекст математического дискурса. Догматик ищет абсолютные способы утверждения непротиворечивости, скажем, принятием ее в качестве предпосылки, а скептик указывает на то обстоятельство, что доказательство непротиворечивости возможно только при обращении к более сильной системе, что ведет к бесконечному регрессу.

Есть два важных обстоятельства, на которых Кадвани строит аналогию между скептическим аргументом и Второй теоремой Гёделя. Во-первых, это истинность т.н. гёделева неразрешимого предложения, истинного и недоказуемого в системе. Во-вторых, это условный характер доказательства этой теоремы. Как было указано в пассаже Блэкберна выше, Гёдель не показал, что невозможно доказательство непротиворечивости вообще. Такое доказательство невозможности сопровождается рядом условий, важнейшим из которых является предположение о непротиворечивости системы. Больше того, речь идет о критериях и стандартах, имеющих смысл только в контексте тех формальных каркасов, для которых доказываемся результаты. Скептический характер Второй теоремы Гёделя состоит в том, что мы оказываемся в состоянии «*isostheneia*» (равносильности), когда невозможен окончательный выбор в пользу догматика, либо скептика. «Равносилием» мы называем равенство в отношении достоверности и недостоверности, так как ни одно из борющихся положений не стоит выше другого как более достоверное».⁸ Именно эти условия, или оговорки, характеризуют весьма тонкий характер скептического размышления, которое вынужденно прибегать к заимствованию словаря и проблематики догматика. Кадвани отмечает это обстоятельство следующим образом:

Эта техническая оговорка [условный характер теоремы Гёделя] имеет эхо в пирроновской методологии. Когда скептика спрашивают о статусе его соб-

⁷ Секст Эмпирик, 1976, 230.

⁸ Секст Эмпирик 1976, 209.

ственных скептических рассуждений, точно так же как Геделя могли бы спросить о статусе его (неверно установленной) не-условной Теоремы, скептик отвечает, что его заключения оформлены только в контексте диалектических дебатов между ним самим и антагонистом, который провозглашает определенность, основанной на некотором заданном критерии истины. Скептик не собирается устанавливать *isostheneia* в оппозицию к стоическому критерию истины, но хочет лишь развить *isostheneia*, исходящую имманентно из стоических предположений, и тем самым показать, что стоические стандарты заставляют стоиков оставить свое объяснение реальности. Скептические аргументы – это ряд шагов, и истина догматической отправной точки только условная для завершения конструкции *isostheneia*. Формальный остаток геделевской имманентной критики программы Гильберта основан на antecedente непротиворечивости. Пирронианец не отрицает знания, точно так же как Гедель не отрицает непротиворечивости или полноты без ограничений, но только при априорном утверждении, основанном на противоположной системе.⁹

Тезис автора данной статьи состоит в том, что следует различать степень «вовлечения» Геделя в скептицизм. Кадвани полагает, что пирроновский скептицизм довольно хорошо моделирует характер геделевского доказательства в том отношении, что

...Неразрешимость, подобно *isostheneia*, всегда основана на конкретной уступке догматизму, и тем самым только условно отвергает абсолютный критерий истины, что не значит показать, что нет вообще абсолютного критерия математической истины.¹⁰

Больше того, Гедель конструирует предикат доказуемости, специфичный для системы, что в значительной степени ослабляет скептический «настрой» теоремы. Выбор других средств для представления концепции непротиворечивости (и стало быть, предиката доказуемости) приводит к тому, что Вторая теорема «не проходит».¹¹ Именно это обстоятельство делает Вторую теорему интересной с точки зрения «пирроновского скептицизма».

Еще один аспект аналогии скептического характера Второй теоремы пирроновскому скептицизму заключается в понимании доказательства этой теоремы. Речь идет о приеме перитропа, то есть, обращении довода противника против него самого. Если скептик (утверждающий теорему) говорит, что нельзя доказать непротиворечивость системы, то догматик укажет, что обе теоремы Геделя уже предполагают эту непротиворечивость в качестве antecedenta. Перитроп является отправной точкой для критики

⁹ Kadvani 1989, 164.

¹⁰ Kadvani 1989, 165.

¹¹ Smith 2013.

скептицизма, и коль скоро Вторая теорема Гёделя считается проявлением скепсиса, представляет интерес то, как Гёдель избежал (если вообще избежал) упреков сторонников доказательства непротиворечивости. В самом «пересказе» Второй теоремы трудно увидеть, в какой степени перитроп вообще может иметь место. Но вот при доказательстве Второй теоремы можно убедиться, что перитроп оправдан, и что Гёдель все-таки сумел избежать его разрушающего действия.

Существует проблема т.н. интенциональности Второй теоремы Гёделя, связанная с тем, что понятие непротиворечивости, понимаемое содержательно, может быть по-разному выражено формальными средствами. Первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что для достаточно сильной формальной системы арифметики всегда можно найти неразрешимое в ней утверждение, при условии непротиворечивости системы. Именно наличие этого неразрешимого утверждения является основой для Второй теоремы о неполноте Гёделя, поскольку утверждение о непротиворечивости является как раз таким неразрешимым утверждением. Для устранения неясности относительно того, как можно формальными средствами выразить содержательную концепцию непротиворечивости, мы должны формализовать антецедент Первой теоремы, что означает и формализацию самой Первой теоремы. Получается в некотором смысле логический круг, что опять-таки в определенном смысле является проявлением перитропа. Действительно, мы имеем дело с различными ипостасями, Первой теоремы Гёделя.¹² Сама по себе Первая теорема является содержательным математическим результатом, с неформальными методами доказательства. Именно этот вариант доказал Гёдель. А вот формальное представление этого доказательства, нужное для доказательства Второй теоремы, в определенном смысле превращает Первую теорему во Вторую, поскольку именно с последней формулируются т.н. условия выводимости Гильберта-Бернайса.

В этом маневре и состоит способ избегания Гёделем последствий перитропа, поскольку он формализует в рамках одного формального каркаса понятие непротиворечивости для Первой теоремы, не позволяя использовать антецедент Первой теоремы для обращения против скепсиса Второй теоремы. Фактически это даже не перитроп, поскольку в аргументации нет самоотрицания. Самое большее, на что может претендовать догматик в споре со скептиком, это на применение истины к метаутверждению о нем, поскольку Вторая теорема является формализацией определенного фрагмента математического дискурса. Тонкость доказательства Второй теоремы за-

¹² Целищев 2017, 106.

ключается, с точки зрения пирроновского скептицизма, в применении такой техники перитропа, при которой Гедель получает желаемые заключения. Но эта техника не полностью совместима с метаматематическими методами. А это означает, что скептицизм Второй теоремы не оставляет нас в состоянии *isostheneia*. Скептический аргумент не достигает желаемой цели полностью, и это незавершенность выливается в новый этап исследований, по сути догматических, а именно, утверждающих возможность доказательства непротиворечивости формальной системы внутри самой системы.

Такого рода «опровержения» Второй теоремы не являются решающими в том смысле, что другие формализации понятия непротиворечивости представляют собой «монстров» в терминологии И. Лакатоса.¹³ Их «монструальный» характер стал полностью ясен в ходе развития теории, базирующейся на семантике модальных систем, которая обеспечивает хорошее математическое обоснование для выбора именно геделевского варианта. Нужно подчеркнуть, именно математическое, но не философское.

С философской точки зрения альтернативы геделевскому определению непротиворечивости столь же мотивированы. Это означает, что значительная часть философских следствий Второй теоремы о неполноте в духе скептицизма не является опять-таки философски обоснованными. В этом обстоятельстве можно усмотреть вариант перитропа, но более интересным обстоятельством является исторические факторы, приведшие к доминированию геделевского варианта, и первоначальному игнорированию интенционального характера геделевских теорем. Быстрое принятие математическим сообществом результатов Геделя не подвинуло ни самого Геделя, ни математиков к исследованию доказательства Второй теоремы. Гедель после доказательства Первой теоремы обещал продолжение в виде доказательства Второй, но оставил эти намерения. Тот вид, который придал позднее доказательству П. Бернайс, соответствуют метаматематической машинерии Геделя, закрепив именно его вариант формализации непротиворечивости в качестве «канонического». Один из ответов скептицизму состоит в признании законности развития других экспликаций непротиворечивости, и значит в отказе от такой каноничности.

Есть и другая интерпретация геделевских прозрений. Их скептический характер гораздо шире специально выбранных математических условий, которые никак не обоснованы философски. Кадвани настаивает на том, что противостоящие геделевским результатам «догматические» установки в философии математики, скажем, Финитизм Гильберта или Аксиома Своди-

¹³ Лакатос 1967.

мости Рассела, не содержат ничего такого, чему может соответствовать скептический философский вызов. Ясно, что если мы погружаем спор в философии математики в пирроновский скептицизм, мы должны представлять скептическую позицию в философию Геделя в более широком эпистемологическом каркасе.

Нет ничего в эпистемологических установках Геделя, что позволяло бы такой ход. Философ Гедель должен аргументировать подобно настоящему пирроновскому скептику, и он может ухватить суть, это основание его математической критики. Но он вынужден переключить скорости, и осуществить компромиссы с тем, как развивалось его доказательство – целые годы! Это подспудное изменение мнения, ознаменованное переходом от философии к математике, поддерживает «натуральный» выбор предиката доказуемости и аргумента о непротиворечивости. Но цена, заплаченная за аисторизм, это впадение в эпистемологический хаос, потому что эпистемология в основе математики пирроновская.¹⁴

Другими словами, Гедель-философ тут уступил место Геделю-математику. А ведь это контрастирует с декларацией Геделем своей «независимости» от преобладания в своих прозрениях математических соображений по сравнению с философскими:

Мнения Геделя резко отличается от впечатления многих математических логиков, которые более сорока лет искали в его работах зерна новаторских математических конструкций или неслыханно глубокие тонкости, однако результаты этих поисков не были вполне убедительны. А между тем сам Гедель, не забывая о непреходящем значении своих работ, постоянно подчеркивал... как мало потребовалось ему новых математических построений. Оказалось, что надо было только обратить внимание на некоторые достаточно общеизвестные (философские) различия. Например, для его наиболее популярного результата это – различие между арифметической истинностью, с одной стороны, и выводимостью ...по формальным правилам – с другой... Гедель видел в своих первых успехах реализацию следующей, часто забываемой, но плодотворной общей схемы. Внимательно рассматривая подходящие традиционные философские концепции и вопросы, анализируя их и, возможно, добавляя чуть-чуть точности, мы безболезненно приходим к нужным понятиям, правильным гипотезам и достаточно простым доказательствам.¹⁵

Таким образом, можно с уверенностью считать, что Гедель-философ, бросив пирроновский вызов математическому мышлению, остановился в своем скепсисе, и не достиг, как уже говорилось выше, состояния

¹⁴ Kadvani 1989, 177.

¹⁵ Крайзель 2003, 7.

isostheneia. Исторические обстоятельства прервали его скептическое предприятие, позволив «догматикам» по прошествии некоторого времени описать ситуации, в которых Вторая теорема не имеет места, и вместе с ней оказываются необоснованными ее многочисленные интерпретации и философские следствия. Но кроме исторических обстоятельств есть еще одно объяснение незавершенности скептического «похода» Геделя:

Мы обнаруживаем... у Геделя любопытное сочетание критического мышления и уязвимости. Он нуждался в некоторых принятых рамках, внутри которых он мог бы безопасно действовать и с крайней неохотой рисковал выбираться за их пределы. Внутри этих рамок он мог быть критичным, работать со всей присущей ему тонкостью и получать удивительные, иногда сбивающие с толку результаты. Однако не предполагалось, что эти результаты должны нарушать установленные рамки или выходить за их пределы.¹⁶

Скептицизм Пирронова толка предполагает достижение некоторого рода неопределенности в отношении критерия истины. Эта неопределенность в случае Второй теоремы Геделя зиждется на проблеме перевода интуитивных и содержательных истин математики в формальную математику. Сама по себе формальная математика является предметом рассмотрения метаматематики, и прямое отождествление математических и метаматематических истин невозможно. Тем не менее, Вторая теорема в некотором смысле это делает, что выделяет ее из ряда обычных теорем математики. Можно сказать, что она больше, чем другие, эпистемологически нагружена. Это последнее обстоятельство делает ее вполне пригодным «полигоном» для иллюстрации пирроновских методов, имеющих дело с доказательствами и их опровержениями. В любом случае, если говорить о непреходящем значении хороших философских теорий, то вряд ли можно найти более удачный пример убедительности скептического метода, как он представлен у Секста Эмпирика, чем ограничительные теоремы Геделя. Некоторые даже готовы провозгласить теоремы Геделя о неполноте элементарной арифметики ярчайшим примером математического скепсиса в век постмодернизма. Под последним понимается ситуация потери математикой определенности и достоверности, наличие многих концептуальных схем оснований математики, само существование которых говорит о ситуации, к которой применимо одно из ключевых понятий пирроновского скептицизма: isostheneia.

¹⁶ Хинтика 2014, 74.

БИБЛИОГРАФИЯ

- Клайн, М. (1984) *Математика: Утрата определенности*. Москва: Мир.
- Крайзель, Г. (2003) *Биография Курта Геделя*. Москва: Институт компьютерных исследований.
- Лакатос, И. (1967) *Доказательства и опровержения*. Москва: Наука.
- Секст Эмпирик (1976) *Три книги пирроновских положений*. Книга Первая. О четвертом тропе. *Сочинения в двух томах*. Т. 2. Москва: Мысль.
- Хинтиikka, Я. (2014) *О Геделе*. Москва: Канон+.
- Целищев, В.В. (2017) «Интенциональность Второй теоремы Геделя о неполноте», *Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология* 40, 98–111.
- Berto, F. (2009) *There's Something about Gödel: The Complete Guide to the Incompleteness Theorem*. London: Wiley-Blackwell.
- Blackburn, S. (2000) "Professor Whatever," *Disputatio* 8, 43–54.
- Dunn, J. M. (1987) "Relevance Logic and Entailment," *Handbook of Philosophical Logic*, eds. Gabbay D., Guenther F. vol. III, Dordrecht: Kluwer, 117–224.
- Eagleton, T. (1996) *The Illusions of Postmodernism*. Oxford: Blackwell.
- Kadvani, J. (1989) "Reflections on the Legacy of Kurt Gödel: Mathematics, Scepticism, Postmodernism," *The Philosophical Forum* 20, 161–181.
- Smith, P. (2013) *An Introduction to Gödel's Theorems*. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

CYRILLIC CHARACTERS REFERENCES transliterated (FOR INDEXING PURPOSES ONLY): Klajn, M. (1984) *Matematika: Utrata opredelennosti*. Moskva: Mir. Krajzel', G. (2003) *Biografiya Kurta Gedelya*. Moskva: Institut komp'yuternyh issledovaniy. Lakatos, I. (1967) *Dokazatel'stva i opроверzheniya*. Moskva: Nauka. Sekst Empirik (1976) *Tri knigi pirronovskih polozhenij*. Kniga Pervaya. O chet-vertom trope. *Sochineniya v dvuh tomah*. T. 2. Moskva: Mysl'. Hintikka, YA. (2014) *O Gedele*. Moskva. Celishchev, V.V. (2017) «Intensional'nost' Vtoroj teoremy Gedelya o nepolnote», *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sociologiya. Politologiya* 40, 98–111.