ПАРАДОКС ЛЖЕЦА И ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

В. В. Целищев
Новосибирский государственный университет
Институт философии и права, Сибирское отделение РАН
leitval@gmail.com

Vitaly Tselishcev
Novosibirsk State University
Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch, Russian Academy of Science

The Liar Paradox and Godel's First Incompleteness Theorem

Abstract. The article critically analyzes the example of the incorrect application of metamathematics, in particular, Gödel's First incompleteness theorem, to the explication of the Liar Paradox by J. Barker. It is shown that an explication of this kind, doubting well known Tarki's definition of truth, is based on the erroneous use of key Gödel constructions - substitution idea and the diagonal lemma. The criticism of the proclamation by Barker of the explication of the Liar as a mathematical theorem shows certain limitations in demonstrating the heuristic analogy between the Liar's sentence and the Godelian sentence.

Key words: Liar paradox, Godel's theorem, explication, truth predicate, self-reference

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 16-18-10359.

Кризис оснований математики в начале XX века, приведший к возникновению знаменитой «троицы» в философии математики – логицизма Б. Рассела, интуиционизма Л. Брауэра и формализма Д. Гильберта – существенно изменил ландшафт современной философии. Поиски путей и способов разрешения парадоксов, поразивших наиболее надежный вид интеллектуальных конструкций – математику, в значительной степени ответственны за раскол мировой философии на аналитическую и континентальную ветви. Парадоксы обнаружили уязвимость рационального дискурса, выходящего за пределы собственно математики, и даже логики, уходя корнями в само употребление человеком языка. Это обстоятельство, ставшее общим местом в современной литературе, проявилось довольно рано, и стало предметом

DOI: 10.21267/AQUILO.2017.11.6471

дискуссий уже в античной философии. Прежде всего, имеется в виду Парадокс Лжеца, или Парадокс Эпименида. Первое упоминание о парадоксе появляется в «Новом Завете», где апостол Павел утверждал:

> Из них же самих один стихотворец сказал: "Критяне всегда лжецы, злые звери, утробы ленивые" [Новый Завет, Послание к Титу Святого апостола Павла I. 12].[1]

Несмотря на предельную простоту парадокса, его решения, до сих пор предложенные, не являются универсально принятыми, и с некоторого времени попытки таких решений, с помощью логико-математического аппарата, превратились в настоящую индустрию. «Лжец», как часто называется парадокс, демонстрирует завидную живучесть, будучи связан с такими фундаментальными понятиями как истина, самоотносимость, иерархии языков и многими другими.

Приписываемое обитателю Крита утверждение «Все критяне лжецы» не может быть ни истинным, ни ложным, поскольку любой выбор ведет к парадоксу. Для греков было странным прежде всего то, что осмысленное утверждение было лишено истинностного значения. Но само по себе утверждение «Все критяне лжецы» еще не представляет парадокса, поскольку оно может быть ложным, будучи контингентным. Но из него легко получается парадокс, имеющий вид логической необходимости, если принять внимание, что существуют критяне, которые говорят истину.

Четкая логическая форма парадоксу была придана Эвбулидом (IV вв. до н. э.), представителем Мегарской школы, которая была известна четкой логикой, с аргументацией в форме «да» и «нет» и постановкой парадоксов. Эвбулиду приписывается парадоксы о числе зерен, при которых получается куча, о «знании» человека в ином обличье, о том, можно ли потерять то, что не имеешь и т. д. Парадокс Лжеца является самым знаменитым из них.

Парадокс использовался Эвбулидом для критики традиции Платона и Аристотеля, которая касалась принятой в ней корреспондентной теории истины:

> Эвбулид приглашал своих слушателей порассуждать о человеке, который говорит: «Я лгу» или «То, что я говорю, ложно». Согласно традиции Платона и Аристотеля, это истинно, если произносимое человеком ложно – это истинно, если оно само ложно – и ложно, если произносимое им не ложно – ложно, если истинно. Следовательно… это ведет к ситуации, когда произносимое нами об истинности или ложности влечет свою противоположность. Мы можем заметить

---

[1] В английской версии это звучит несколько более обстоятельно: «One of themselves, even a prophet of their own, said ' Cretans are always liars, evil bests, lazy gluttons'.

> также, что в этом примере аристотелевская односторонняя зависимость истинности или ложности суждений от соответствующих фактов не соблюдается, так как этими самыми фактами являются в точности истинность или ложность суждений. Этот «Парадокс Лжеца» интенсивно обсуждался в Античности и Средневековье, и до настоящих времен представляет серьезную проблему для каждого пытающегося дать удовлетворительную общую трактовку истины и лжи (Prior 1967, 224).

Парадокс Лжеца относится к классу так называемых «семантических парадоксов», если следовать современной терминологии, в отличие от «теоретико-множественных» парадоксов. Разделение парадоксов на два класса впервые было произведено Ф. Рамсеем, который называет Парадокс Лжеца (в виде «Я сейчас лгу») лингвистическим. В определенном смысле группа этих «лингвистических» парадоксов (группа «B» у Рамсея) более фундаментальна, чем теоретико-множественные парадоксы. В самом деле:

> ...противоречия группы B не являются чисто логическими и не могут быть сформулированы в одних логических терминах, ибо все они содержат некоторую отсылку к мысли, языку или символизму, которые являются не формальными, но эмпирическими терминами. Поэтому своим возникновением они могут быть обязаны не ошибочной логике или математике, но ошибочным идеям, касающимся мысли и языка (Рамсей 2011, 38).

Вопреки заветам Рамсея, Парадокс Лжеца на протяжении длительного времени пытаются решить как раз логико-математическими средствами. Одним из наиболее важных направлений подобного толка является использование концепций иерархии языков и истины в формализованных языках А. Тарского (Sher 2002). Теория Тарского является логико-математической теорией, и поэтому неизбежен перевод версии парадокса в обыденном языке в формальный язык с четкой логической структурой. Среди способов подобного перевода определенную роль играет сходство с идеями, воплощенными в доказательстве Первой теоремы о неполноте Геделя. В этом отношении характерно замечание Г. Серени:

> Факт, что теорема Геделя и парадокс Лжеца близко соотносятся, не только хорошо известен, но является даже общим представлением логического сообщества. На самом деле, почти каждая более или менее формальная трактовка теоремы делает ссылку на эту связь. Да и сам Гедель не стал исключением, сделав замечание в статье, анонсируя свой результат. «Аналогия между этим результатом и антиномией Ришара бросается в глаза; есть также близкое родство с антиномией «Лжеца»... здесь мы сталкиваемся с предложением, которое утверждает свою собственную недоказуемость». В свете того факта, что существование такой связи является вещью общепризнанной, еще более удивительным фактом является то, что очень мало исследовано о точной природе

> этой связи, как раз в силу того, что она имеет вид скорее некоторого сходства или аналогии (Sereny 2003, 3).

В парадоксе «Лжеца» ведущей идеей является самореференция, то есть указание предложения на самого себя. Цитированное выше замечание Геделя, которое часто интерпретируется как признание эффекта самореферентности, в настоящее время считается в лучшем случае эвристическим (Buldt 2016). При замене истины понятием доказательства парадокс исчезает, и аналогия рушится. Рассматривая аналогию «Лжеца» и Первой теоремы Геделя, ван Хейеноорт так описывает в самых общих чертах структуру геделевского доказательства:

> Аналогия с парадоксом «Лжеца» очевидна, но есть важные ограничения на эту аналогию. Если посредством всякого рода известных способов мы делаем предложение, утверждающее «Я не истинно», мы получаем парадокс: предложение влечет свое отрицание; отрицание влечет предложение. Но если мы как-то сконструируем предложение «Я не доказуемо», парадокс не возникает. Обозначим через g предложение, и в отношении понятия «доказательства» просто предположим, что ничто из доказуемого не может быть ложным. Если бы g было доказуемым, оно было бы ложным, отсюда, оно не доказуемо. Следовательно, оно не доказуемо и истинно (поскольку это именно то, что оно утверждает). Отрицание g, которое устанавливает, что оно доказуемо, ложно, отсюда оно также не доказуемо. Мы скользим вдоль парадокса, никогда не впадая в него истинно. Предложение g недоказуемо и истинно; его отрицание недоказуемо и ложно. Единственное обстоятельство, которое приводит к этому удивительному результату, это введение различия между «истинно» и «доказуемо». Если отказаться от этого различения, возникает парадокс (van Heijenoort 1967, 352).

Таким образом, аналогия является лишь аналогией, и лобовое использование Первой теоремы Геделя о неполноте для разрешения парадокса Лжеца является рискованным предприятием. Тем более, что современные доказательства Теоремы отличаются от исходного геделевского, в частности, на передний план выходит Диагональная Лемма, использование которой для разрешения парадокса Лжеца требует осторожности. Между тем, достаточно часто подобная осторожность при попытках применить современную логическую технику к разрешению философских проблем не соблюдается, в частности, при экспликациях самого парадокса, когда используются некоторые концепции метаматематики. В этом отношении показательна недавняя полемика между Дж. Баркером (2009) и Д. Джэкетом (2010).

Экспликация и тем более разрешение парадокса формальными средствами требует осторожности как в самой манере перевода от обыденного языка к формальной системе, так и использования результатов относительно этой самой формальной системы. Особенно это важно при привлечении одного из важнейших результатов в математической логике – теорем Геделя о неполноте арифметики. Один из участников полемики, Дж. Баркер, пренебрег осторожностью в этом вопросе, претендуя на понимание природы Парадокса Лжеца. Пример аргументации Баркера показателен в двух аспектах. Во-первых, она является очередным примером злоупотреблений в интерпретации теорем Геделя в попытках приспособить их к решению Парадокса Лжеца, и во-вторых, она создает иллюзию глубины апелляцией к деталям метаматематики, представляя по существу плохо организованное сочетание логической техники и непоследовательности в мышлении. Цель данной статьи состоит в анализе ошибочности привлечения теорем Геделя в качестве поддержки аргументации о разрешении Парадокса Лжеца (далее «Лжец»). (Для удобства читателя нумерация формул соответствует указанной выше статье Дж. Баркера).

Джэкет и Баркер в своей полемике расходятся во мнении, какое формальное утверждение лучше схватывает природу Лжеца, представленного в обыденном языке в такой форме:

(1) Предложение (1) не истинно.

Парадоксальность ситуации очевидна, когда из истинности (1) мы извлекаем его ложность, а из ложности – истинность. Для обнаружения истоков парадокса оба соглашаются в том, речь должна идти о формуле, которая свяжет само парадоксальное предложение с упоминанием его как ложного, или же отрицанием его истинности, скажем, в такой форме:

(2) $L \rightarrow \neg \mathrm{TRUE}\ (*L*)$

где L – предложение Лжеца, TRUE – предикат истины, *L* - упоминание предложения L (термин «упоминание» – в контексте противопоставления упоминания и употребления) (Куайн 2010). Упоминание может принимать различные формы, среди которых можно назвать закавычивание и геделевскую нумерацию. В контексте данного анализа систематическое смешение этих двух видов упоминания является существенным фактором. Предложение (2) говорит, в переводе на естественный язык, что если L, тогда L не истинно. Это вполне совпадает с интуитивной формулировкой (1). Отметим, что предикат TRUE является частью сигнатуры некоторого не специфицированного языка.

Однако вполне приемлемой экспликацией Лжеца может служить не условное предложение (2), а более жесткое двустороннее условие, а именно

(3) $L \leftrightarrow \neg \mathrm{TRUE}\ (*L*)$

Это главный пункт расхождения Баркера и Джэкета; первый из них предпочитает (3), в то время как второй предпочитает (2). Как оказывается, кажущееся с первого взгляда незначительным различие (2) и (3) скрывает принципиально разные подходы и возможности применения метаматематической техники к ним. Утверждения (2) и (3) имеют разный логический статус, но не сами по себе, а в контексте соображений об их непротиворечивости. Баркер полагает, что более полное представление о силе (2) и (3) получается только при их использовании совместно с нелогической посылкой, а именно с т. н. Схемой Раскавычивания, ассоциируемой с Т-схемой Тарского в его семантической концепции истины (Ray 2002).

(4) TRUE (*A*) $\rightarrow$ A

При присоединении Схемы Раскавычивания обретает некоторый смысл предполагаемый предикат истины TRUE, о котором при его введении в (2) и (3) мало что сказано. Не оговорено, какова при этом формальная система, и что еще более важно, неясна область применения предиката истины. В применении к предложению Лжеца, Схема Раскавычивания принимает вид

(5) TRUE (*L*) $\rightarrow$ L.

Легко показать, что комбинация (3) + (4) приводит к противоречию, в то время как комбинация (2)+(4) к противоречию не приводит. Джэкет (Jacquette 2007) полагает, что именно в отсутствии противоречия комбинации (2) + (4) «зарыта собака»: коль скоро экспликация парадокса есть экспликация противоречия, то вывод этой комбинации должен быть противоречивым. А поскольку такого противоречия нет, Парадокс Лжеца блокирован. Тем самым показано, что разрешения парадокса надо искать на пути экспликации его через (2). На этой стадии становится ясна важность различения (2) и (3), поскольку принятие каждого из них ведет к разным пониманиям природы парадокса. Мы не останавливаемся на способе решения Джэкетом Лжеца. Интерес представляет аргументация его оппонента Баркера, который предлагает в качестве причин парадоксальности Лжеца ревизию некоторых фундаментальных положений логической семантики, претендуя на углубление понимания природы парадокса через применение метаматематической техники.

Баркер принимает в качестве экспликации Лжеца (3). Но поскольку оно не ведет к искомому противоречию (это все-таки парадокс), причину парадоксальности надо искать в другом, а именно, в Схеме Раскавычивания (4). При таком подходе парадоксальность Лжеца принимает еще более сильный вид, потому что отрицание Схемы Раскавычивания является слишком радикальным шагом. Но именно эта радикальность и озадачивает: сама идея отказа от хорошо понятого принципа логической семантики, а именно, отказа от Схемы Раскавычивания крайне странна. Но в этом и состоит, с точки зрения Баркера, парадоксальность некоторых вещей, связанных с использованием языка: другими словами, перед вами Парадокс Лжеца! (Barker 2009).

Предполагается, что в основе парадоксов типа Лжеца, лежит механизм самореференции, механизм которой в существенной степени зависит от того, как осуществляется указание - собственными именами или определенными дескрипциями (Sainsbury 2008). Сами по себе (2) и (3) мало что могут сказать о механизме указания. По этой причине Баркер оставляет на время в стороне предпочитаемую им схему (3) в качестве экспликации Лжеца, и предлагает еще один вариант экспликации, в которой, как он полагает, более прозрачна роль понятия референции. Но это не значит, что ему не понадобится экспликация (3), которую он приберегает для использования на более поздних этапах своей аргументации. Здесь сразу надо отметить фундаментальный недостаток аргументации Баркера. Он использует две экспликации, подключая в довольно произвольном порядке то одну, то другую, ничего не говоря об их соместимости или согласованности, что можно считать слабостью или даже серьезным недостатком уже на данном этапе рассмотрения.

Новая экспликация Лжеца представлена предложением (опять-таки, мы сохраняем для удобства нумерацию формул, использованной в упомянутой статье Баркера)

(8) $\neg$ TRUE (a),

где *a* есть собственное имя, которое обозначает само предложение (8). Обстоятельство обозначения собственным именем *a* предложения (8), то есть, акт самореференции, может быть выражен как

(9) a = *$\neg$ TRUE (a)*

С точки зрения Баркера, (9) есть одна из экспликаций Лжеца, наряду с (2) и (3). Поскольку по-настоящему Лжец в случае (2) и (3) получается присоединением Схемы Раскавычивания (4), вполне естественно попытаться сделать это для случая (9). Теперь пример Схемы Раскавычивания, подстановкой в (4) вместо A предложения $\neg$ TRUE(a), принимает вид

(10) TRUE (*TRUE (a)* $\leftrightarrow$ $\neg$ TRUE (a)

Предложения (9) и (10) дают противоречие

(11) TRUE(a) $\leftrightarrow$ $\neg$ TRUE (a).

Мы получили, по мысли Баркера, желаемый результат для объявления (9) реальным конкурентом (2) и (3), потому что комбинация (9) + (4) парадоксальна.

Такой вывод гарантируется логикой первого порядка, как то заявляется Баркером. Вопрос состоит в том, насколько законно подставлять вместо A предложение $\neg$ TRUE (a) в Схему Раскавычивания, поскольку сам предикат TRUE (определение которого так пока и не введено) может включать (явно или неявно) референцию, что усложняет, и быть может, искажает аргументацию. Но и без этих соображений ясно, что использование собственных имен в самореферентных контекстах может привести к другим проблемам. Действительно, при указании символом предложения требуется не навешивание «ярлыка» в виде собственного имени, а описание указываемого предложения. Другими словами, для того, чтобы (9) было истинным конкурентом (2) и (3), требуется использование для указания определенных дескрипций, а не имен.

Противоречивость комбинации (9) + (4) может объясняться либо неправомерностью использования, как и прежде, Схемы Раскавычивания, либо представлением (9) как экспликации Лжеца. Трудности в отношении последнего варианта лежат в попытке объяснения, почему собственное имя *a* не может быть использовано для указания предложения, в которое оно само входит. Баркер избегает такого рода объяснений, просто переходя к альтернативе с использованием вместо собственного имени определенной дескрипции.

Введение в рассмотрение дескрипций, требующее соблюдения для них условий единственности указания, приводит к формуле, которая является, по убеждению Баркера, самореферентной и парадоксальной в смысле Лжеца, говорящей, что она не истинна (Barker 2009, 11–13):

(13) $\forall x\ (Dx \leftrightarrow x = {*L*})$

где Dx дескрипция предложения. (13) немедленно дает, по мысли Баркера, искомое утверждение

(14) $L \leftrightarrow \neg$ TRUE (*L*).

Однако, он тут же оставляет ее, апеллируя к другому способу создания самореферентных предложений, ссылаясь на предложенный Геделем способ при доказательстве Первой теоремы о неполноте. Речь идет о хорошо известном построении функции Sub, одной из главных компонент в конструировании геделева предложения (Berto 2009, 89–94). Аргументами функции Sub (m, n, p) являются геделевы числа. Смысл функции таков: она дает код формулы, получаемой из формулы с кодом m, подстановкой в нее вместо свободных переменных с кодом n, числовых значений p. Баркер модифицирует Sub, конструируя так, чтобы получить для некоторых формул F и G утверждение, равносильное арифметической функции:

(16) $\forall z\, (Sub(*F(x)*, *G*, z) \leftrightarrow z = *F\, (*G*)*)$

Если это и является корректной модификацией Sub, возникают вопросы относительно смысла полученной формулы. Неоднозначность косвенного указания при закавычивании переходит у Баркера в геделевскую нумерацию. С самого начала своей аргументации Баркер прибегает к неоднозначности в этом вопросе: неясно, что он имеет в виду - имена предложений или геделевы числа этих предложений. Построение парадоксальных самореферентных предложений возможно для естественного языка, и как показывает, например, парадокс Куайна [Quine 1966], при этом отчетливо выделяется идея диагонализации. Но Баркер претендует на формальную экспликацию Лжеца, и ему нужна уже геделева нумерация. Но в этом случае возникает сонм вопросов относительно понимания Sub, о том, является ли она примитивно рекурсивной, выразима ли она и является ли представимой. Все эти вопросы имеют смысл относительно формальной системы, и тут Баркер загадочно молчалив. Что не мешает ему конструировать с помощью Sub в его формулировке новую формулу

(21) $\forall z\, (D\, (z) \leftrightarrow *\, \exists z\, (D(z)\ \&\ \neg\, TRUE(z))*)$,

символы которой не привязаны ни к какой конкретной формальной системе. Озадачивает тут смешение чисто синтаксической конструкции Sub и семантического предиката TRUE. Формула (21) получается через формулу $H(x) \equiv \exists z\, (Sub\, (x,x,z)\ \&\ \neg\, TRUE\, (z))$, затем, через D(z) обозначается формула $Sub(*H(x)*, *H(x)*, z)\ \&\ \neg\, TRUE(z)$. Очевидна странность полученной формулы, которая оказывается эквивалентной формуле (13). И это все для того, чтобы показать, что (21), а значит, и (16), входит в конфликт со Схемой Раскавычивания (4). Это должно быть аргументом о неприемлемости этой схемы. Каков же итог этого всего предприятия?

> Предыдущее обсуждение является несколько техническим, но вот его итог. Поскольку в нашем формальном языке мы имеем формулу для подстановки, которая удовлетворяет (16), мы оказались способны сконструировать формулу D(x), которая однозначно единственным образом обозначает предложение L, которое в свою очередь говорит, что объект, обозначаемый через D(x), – то есть, самом предложение L, не истинно (Barker 2009, 14).

Далее, следует фраза, которая раскрывает еще одну скрытую цель предприятия.

> Таким образом, поскольку мы имеем (16), мы можем сконструировать Лжеца в строгом, в терминах двустороннего условного предложения, удовлетворяющего (3). Так как двустороннее условие логически несовместимо со Схемой Раскавычивания (4), то же относится и к (16) (Barker 2009, 14).

Таким образом, Баркер демонстрирует, что главная цель экспликации Лжеца достигнута, и ею является схема (3). Теперь самое время задать вопрос, откуда взялось двустороннее условное утверждение? Баркер хочет произвести впечатление, что это является естественным выводом из всей предложенной им машинерии, и таким образом, его конструкция представляет убедительную общую картину природы Лжеца. Но на самом деле мы имеем типичный вариант *ad hoc* аргументации. Действительно, двустороннее условие взялось из своеобразной формулировки Баркером функции Sub (16). Дело в том, что Sub не имеет прямого отношения к (3), поскольку (16) и (3) решают разные задачи, и подгонка (16) под (3) делает все предприятие подозрительным: Sub оказывается одновременно средством для получения дескрипции и двустороннего условия, совпадение, не слишком впечатляющее и даже подозрительное.

Наконец, диагонализация функции Sub (x, y, z), превращающая ее в Sub (x, x, z), требует понимания того, что одно и то же число используется двумя различными способами (что и является сутью операции диагонализации). Число x является одновременно исходным геделевым числом формулы, и числом, которое подставляется вместо свободной переменной (Hofstadter 1979, 446). Все эти тонкости, нужные для конструирования геделева предложения, становятся ненужными в использовании Sub Баркером, что и приводит к мысли об искусственности его аргументации. Ее суть, как уже говорилось выше, состоит в следующем: все три последовательно порождаемые предложения – (9), (13) и (16) – дают противоречия в комбинации со Схемой Раскавычивания. Поскольку эта тройка и Схема являются вполне обоснованными, мы имеем фундаментальное затруднение. Это затруднение и есть парадокс – мы не можем выбрать между тройкой (9), (13), (16) и Схемой Раскавычивания. И этот парадокс и составляет суть Парадокса Лжеца. Поскольку кажущаяся Баркеру неотразимость (9), (13) и (16) основывается на (3), предлагаемая Д. Джекетом экспликация Лжеца через условное предложение (2) не проходит.

Не подвергая анализу аргументацию Джекета, тем не менее можно сказать, что ее опровержение Баркером корректно, поскольку в ней, как уже частично показано нами, есть множество нечетких положений и лакун. Постепенное развертывание ключевого положения от (9) к (16) включает все большее число концепций, которые употребляются вне контекста, без понимания условий их применимости, и без соотнесения с четко определенным формализмом. В частности, Баркером не сформулирована формальная система, в которой его построения значимы, и смешение синтаксических и семантических аспектов формализма является решающим недостатком его подхода к экспликации Лжеца. Очевидно, понимая уязвимость подобного рода, Баркер апеллирует все-таки на определенном этапе к известной формальной системе – Арифметике Пеано, делая при этом еще большие ошибки.

Конечной целью Баркера является утверждение (3) в качестве основы экспликации природы Лжеца. Очевидно, утомившись от более или менее косвенных подтверждений правильности этого тезиса, он переходит практически в лобовую атаку, объявляя, что (3) является доказуемой формулой в Арифметике Пеано. Здесь есть две «новости»: во-первых, специфицируется формальная система, вместо которой в предыдущих поисках был некоторый неопределенный язык K, и во-вторых, Баркер совершает очередной экскурс в метаматематику, апеллируя к Диагональной Лемме. Этого можно было ожидать, поскольку намеренная неоднозначность в отношении природы имен должна была разрешиться в пользу геделевской нумерации. Далее, им задается спецификация языка K как языка арифметики. Этот язык обогащается предикатом истины TRUE, и в этом последнем Баркер находит доказательство утверждения (3) $L \leftrightarrow \neg$ TRUE (*L*).

Этот смелый шаг, детали которого будут рассмотрены позднее, с самого начала является полным игнорированием результатов метаматематики. Из теоремы Тарского о неопределимости истины в достаточно сильных формальных системах (Tarski 1983), в частности, Арифметике Пеано, следует невозможность непротиворечивости этой системы с определенным в ней предикатом истины (Smullyan 1991).

Более того, Диагональная Лемма не может быть использована для создания Парадокса Лжеца. Чтобы доказать первую теорему Геделя о неполноте, конструируется предложение «*x* не может быть доказано». Но для того, чтобы создать Парадокс Лжеца, требуется формально построить функцию «Предложение *x* ложно». Диагонализация показывает, что есть некоторые функции, которые невозможно присвоить геделев номер. Это означает, что некоторые функции не могут быть формально построены. «Предложение *x* ложно» является одной из этих функций.

Уже одного этого факта вполне достаточно, чтобы объявить стратегию Баркера бессмысленной. Однако представляет интерес, каким образом осуществляется злоупотребление Первой теоремой Геделя о неполноте, одно из многих злоупотреблений, связанных с метаматематикой.

В предлагаемом Баркером языке, преподносимым им как Арифметика Пеано с предикатом истины, общая схема Диагональной Леммы в виде A $\leftrightarrow$ F (*A*) принимает при выборе предиката $\neg$ TRUE и предложения L следующий вид:

L $\leftrightarrow \neg$ TRUE (*L*)

Такая апелляция к Диагональной Лемме является абсолютно неоправданной. Как известно, выбор предиката должен быть весьма осмотрительным, отвечающим ряду требований, о которых Баркер вообще не говорит ничего. Далее, поскольку не показано, что само предложение L является диагонализируемым, вся затея Баркера становится бессмысленной.

Но, похоже, что если выводы Баркера противоречат установленным результатам метаматематики, тем хуже для метаматематики. Действительно, в попытках эксплицировать Лжеца ему приходится идти на шаги, радикальность которых выходит за пределы собственно строгого логического разговора:

> Схема Раскавычивания [в данном контексте (4)] ...логически несовместима с Арифметикой Пеано... Используя Диагональную Лемму, мы можем показать, что предложение L [языка арифметики плюс предикат истины], такое как двойное условие L $\leftrightarrow \neg$TRUE (*L*) есть теорема Арифметики Пеано.... [Это утверждение] логически несовместимо с предложением L $\rightarrow\neg$ TRUE (*L*), которое, конечно же, является примером Схемы Раскавычивания. ...Вся эта конструкция есть в существенной степени драматический способ демонстрации, что Схема Раскавычивания потерпела неудачу (Barker 2009, 17).

При таком понимании ситуации (3) объявляется математической теоремой (!), которую невозможно отвергнуть. Поскольку (3) конкурировала с предложенной Джэкетом экспликацией Лжеца в виде (2), утверждение (3) является предпочтительным. Но возникает вопрос, в чем собственно предпочтительным. И тут мы являемся свидетелями странного кульбита. Поначалу (3) выдвигается в качестве экспликации Лжеца, некоторого рода пробной гипотезы, в пользу которой приводится довольно обстоятельная (хотя и ошибочная) аргументация, связанная с ролью собственных имен и необходимостью их замены определенными дескрипциями. В ходе этой аргументации используется (опять-таки ошибочно) конструкция функции Sub, фигурирующая в доказательстве Первой теоремы Геделя. И вдруг (3) объявляется математической теоремой. Если это так (а это попросту неверно), зачем нужно было «городить огород» предварительными рассмотрениями, если математическая достоверность является гарантией правильности (3)? Судя по всему, для Баркера является приятным сюрпризом, что выдвинутая им гипотеза в отношении экспликации Лжеца оказалась теоремой, то ли в результате предустановленной гармонии, то ли абсолютно случайно.

Ясно, что в методологическом отношении такой анализ Парадокса Лжеца неприемлем. Равно неприемлема и апелляция к метаматематическим результатам, плохо понятым и неверно использованным. В текстах Баркера можно найти множество огрехов, некоторые из которых рассмотрены в данной статье, но вольное обращение с метаматематикой обращает на себя особое внимание в связи с Первой теоремой Геделя. Использование аналогии этой теоремы с формулировкой Лжеца требует тщательности, отсутствие которой нивелирует даже самые смелые спекуляции о природе Парадокса Лжеца.

Библиография

Куайн, У. (2010) «Референция и модальность», Куайн, У. *С точки зрения логики*. Пер. В. А. Суровцева. Москва: Канон+.

Рамсей, Ф. (2011) «Основания математики», Рамсей, Ф. *Философские работы*. Пер. В. А. Суровцева. М.: Канон+.

Barker, J. (2009) "Disquotation, Conditionals, and the Liar," *Polish Journal of Philosophy* 3.1, 5–21.

Berto, F. (2009) *There Is Something about Gödel: The Complete Guide to the Incompleteness Theorems*. Oxford: Wiley-Blackwell, 89–94.

Buldt, B. (2016) "On Fixed Points, Diagonalization, and Self-Reference," *Von Rang und Namen. Essays in Honour of Wokfgang Spohn*, ed. by W. Freitag et al. Munster: Mentis, 47–63.

Hofstadter, D. (1979) *Gödel. Escher. Bach*. New York: Harvester Press.

Jacquette, D. (2010) "Liar Paradox and Substitution into Intensional Contexts," *Polish Journal of Philosophy* 4.1, 119–147.

Jacquette, D. (2007–2010) "Denying the Liar," *Polish Journal of Philosophy* 1.1 (2007) 91–98; 4.1 (2010) 119–147.

Prior, A. N. (1967) "Correspondence Theory of Truth," *The Encyclopedia of Philosophy*, ed. by P. Edwards. V. 2 New York: The MacMillan Company & Free Press, 224.

Ray, G. (2002) "Truth, the Liar, and Tarskian Truth Definition," *A Companion to Philosophical Logic*, ed. by D. Jacquette. Oxford: Blackwell Publishers, 164–176.

Quine, W. V. (1966) "The Ways of Paradox," Quine, W. V. *The Ways of Paradox and Other Essays*. New York: Random House.

Sainsbury, R. M. (2008) "The Essence of Reference," Oxford Handbook of Philosophy of Language, ed. by E. Lepore and B. Smith Oxford: Clarendon Press, 393–421.

Sereny, G. (2003) "Gödel, Tarski, Church and the Liar," *Bulletin of Symbolic Logic* 9.1, 3–25.

Sher, G. (2002) "Truth, the Liar, and Tarski's Semantics," *A Companion to Philosophical Logic*, ed. by D. Jacquette. Oxford: Blackwell Publishers, 145–163.

Smullyan, R. (1991) *Gödel's Incompleteness Theorems*. New York: Oxford University Press.

Tarski, A. (1983) *Logic, Semantics, Metamathematics*. New York: Hackett.

Van Heijenoort, J. (1967) "Gödel's Theorem," *The Encyclopedia of Philosophy*, ed. by P. Edwards. V. 2 New York: The MacMillan Company & Free Press, 352.