«ФИЗИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА» АРХИМЕДА, ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И МЕХАНИЗМЫ НОВАЦИЙ В МАТЕМАТИКЕ

Л. С. Сычева
Новосибирский государственный университет
sls@academ.org

Ludmila Sychova
Novosibirsk State University, Russia

Innovations in mathematics: from the "physical mathematics" of Archimedes to the "integral calculus"

Abstract: The paper deals with the history and mechanisms of the novation in mathematics from Archimedes to Newton and Leibnitz that had ultimately led to invention of the integral calculus. Archimedes created the 'method' and managed to solve the basic problems, related with calculation of the areas and volumes of curvilinear figures. Although Kepler, Cavalieri, Fermat and other modern mathematicians followed the way and developed the method of Archimedes, the calculus in the proper sense of this word was finally invented by Newton and Leibnitz as a result of their 'reflexive thinking', when they realized that it was the calculus itself, not the class of problems it had been designed to solve, that should be considered the primal objective of their investigation. The article shows how the exact and natural sciences, such as astronomy, mechanics and optics, put questions to mathematics and how the latter respond to this questions with various form of innovative solutions.

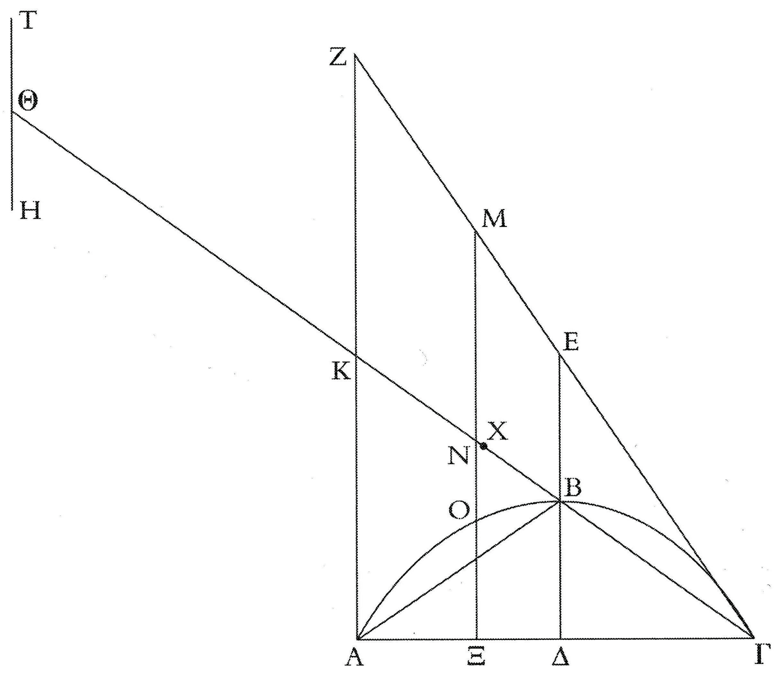
Keywords: Archimedes, method of mathematical theorems, calculus, innovative thinking

Для того чтобы определить задачи статьи, рассмотрим высказывание Д. Пойа: «Так уж сложилось, что одно из величайших математических открытий всех времен и народов имело своим источником физическую интуицию. Я имею в виду открытие Архимедом той ветви науки, которую сегодня мы называем интегральным исчислением. Архимед нашел площадь параболического сегмента, объем шара и еще около дюжины подобных результатов с помощью единообразного метода, в котором важную роль играет идея равновесия. Как он сам сказал, он «исследовал несколько математических задач средствами механики»» (Пойа 1975, 173–174). Сформулируем несколько вопросов. Открыл ли Архимед интегральное исчисление? Если да, то почему обычно считается, что дифференциальное и интегральное исчисление возникло в XVII веке в работах Ньютона и Лейбница? Почему открытие исчисления растянулось почти на 2000 лет? Да и Ньютон и Лейбниц – не «окончательные» авторы исчисления. После них были Коши, Вейерштрасс, а иногда завершение этого процесса относят еще дальше – к появлению нестандартного анализа. Что происходило с III века до н. э., когда жил Архимед, до XVII века, когда появились сочинения Ньютона и Лейбница? К числу создателей исчисления относят также Кеплера, Кавальери, Ферма и других авторов. Каков их вклад в создание исчисления, что именно они делали и почему не они создали исчисление? Архимед – один из создателей исчисления или его относят к авторам исчисления задним числом, когда исчисление уже создано? А может быть и правомерно его считать одним из авторов в силу того, что он сам осознавал значимость своего метода (правда, это метод *нахождения площадей* и объемов криволинейных фигур). Таким образом, рассмотрим две группы вопросов – *первая* связана с Архимедом – каковы механизмы новаций в его работе, какую роль играют средства *механики* в решении *математической* задачи вычисления объемов криволинейных тел? Почему нельзя в полной мере считать Архимеда создателем интегрального исчисления, хотя он и решил задачи нахождения объемов тел – типичные задачи интегрального исчислении? Вторая группа вопросов – о дальнейшем пути формирования исчисления – что сделали Кеплер, Кавальери, Ферма и другие математики для создания исчислении? Почему не они его авторы, а Ньютон и Лейбниц. Что именно сделали Ньютон и Лейбниц для создания исчисления? Что все же осталось на долю Коши и Вейерштрасса – т. е. почему понадобилась работа по *обоснованию* исчисления?

Совокупность вопросов можно дополнить, поставив другую цель – интересоваться не созданием данного *исчисления*, а *новациями в математике*. Случайно или нет при решении новой *математической* задачи Архимед обратился к *механике*? Каким образом решение конкретной математической задачи (вычисление объемов криволинейных тел) привело к формированию новых понятий (дифференциал, интеграл) и созданию новой математической теории? Почему понадобились исследования по обоснованию математического анализа? В итоге все это ответы на один вопрос – каковы механизмы новаций в математике.

Рассмотрим, как Архимед доказывает знаменитую теорему о площади сегмента параболы в работе «Послание к Эратосфену. О механических теоремах» (Архимед 1962, 300–301):

> «Пусть ΑΒΓ будет сегмент, заключающийся между прямой ΑΓ и параболой ΑΒΓ; разделим ΑΓ пополам в Δ, параллельно диаметру проведем ΔΒΕ и соединяющие прямые ΑΒ и ΒΓ (см. рисунок). Я утверждаю, что сегмент ΑΒΓ составляет четыре трети треугольника ΑΒΓ».



Чтобы осуществить доказательство, Архимед 1) преобразует чертеж – делит отрезок АГ пополам в точке Δ, проводит линию ΔВЕ параллельно диаметру и соединяет прямые АВ и ВГ. Затем из точек А и Г проводит АZ, параллельную АВЕ, и ГZ, касательную к параболе; продолжает ГВ до К и откладывает КΘ, равную ГК. 2) распознает на преобразованном чертеже равноплечий рычаг ГΘ с серединой К, т. е. работает в рамках механики (статики); 3) проводит прямую МΞ, параллельную ЕΔ, устанавливает ряд равенств, т. е. снова работает в рамках геометрии 4) пользуясь тем, что MN равна NΞ, заключает, что точка N есть центр тяжести прямой МΞ и прямая ТΞН уравновесит МΞ, 4) устанавливает, что точка К будет центром тяжести величины, составленной из обоих весов (ТН и МΞ) 5) заполняет треугольник ГZА и сегмент прямыми, передвигает сегмент параболы так, чтобы точка К была центром тяжести величины, составленной из них обоих.[1]

[1] Недавно заново обретенный и прочитанный международной группой исследователей «Палимпсест Архимеда» содержит ряд ранее неизвестных теорем и доказательств, в частности положение 14 «Метода», где Архимед находит объем цилиндрического сегмента и, сопоставляя площади и объемы, пользуется понятием величины и производит эксплицитное суммирование бесконечного числа геометрических объектов, что усиливает исходное положение и показывает, что Архимед, возможно, приблизился к открытию идеи интеграла гораздо ближе, нежели мы ранее думали. Подробнее см. Netz–Noel 2007, 187 сл.

Для анализа метода Архимеда воспользуемся представлениями о *конструкторе* как одной из программ научного исследования. Концепция была предложена М. А. Розовым: «Конструктором мы будем называть некоторое множество объектов, для которых заданы определенные способы их преобразования» (Розов 2004, 281). В науке мы сталкиваемся с такими программами конструирования, как «конструирование чисел, без чего невозможен счет и измерение, и различные системы координат, без которых невозможно задать положение тела в пространстве. Это атомистика, позволяющая строить объяснения огромного количества физических и химических явлений» (Розов 2006, 343).

Мы видим, что Архимед работает в конструкторе *геометрии*, при этом он так преобразует чертеж, чтобы можно было воспользоваться представлениями *статики*, открытыми им же самим (распознать равноплечий рычаг, центры тяжести фигур), затем так достраивает чертеж, чтобы получились фигуры, которые находятся в равновесии, что опять является прерогативой механики. Его доказательство свидетельствует о том, математика – это не просто система рассуждений, но, прежде всего, преобразование чертежей (или записей, если речь идет об алгебре), а затем, использование знаний из близ лежащей науки – статики, и наконец, возвращение снова к геометрии.

Часто философы не замечают конструирование как тип работы в математике, полагая, что строгое математическое доказательство должно быть выведено из определенного конечного числа утверждений (аксиом) и не использует никакой информации, выходящей за пределы этих утверждений (Перминов 1986, 6). Вопрос о строгости математического доказательства имеет не только академический интерес. Он имеет практический смысл – что допустимо в доказательстве теорем, а что – нет. Идея герметичности не разрешает пользоваться никакой информацией, не содержащейся в исходных явных утверждениях. Здесь надо, вероятно, различать процессы, связанные с догадкой о *содержании* доказываемых теорем, и *изложение* доказательства. В изложении может быть и можно требовать ссылки только на фиксированные исходные утверждения. Процесс обоснования анализа с этой точки зрения есть, вероятно, не что иное, как выведение утверждений об интегрировании и дифференцировании из чисто математических предпосылок – языка пределов, не прибегая к бесконечно малым. Но практика показывает, что пока та или иная математическая теория (дисциплина) только складывается, ученые часто прибегают к «внешним» ресурсам – знаниям других наук, философским аргументам, метафизическим соображениям и т. д. Именно так поступает Архимед: он использует знания статики, находит центры тяжести фигур, преобразует чертежи так, чтобы появился рычаг, перемещает фигуры таким образом, чтобы они находились в равновесии и т. д. Вся история формирования дифференциального и интегрального исчисления сопровождается подобными действиями (исчисление нулей Эйлера, отбрасывание бесконечно малых в одних случаях и не отбрасывание – в других). Это не случайно, и обусловлено тем, что сначала интегральное исчисление формируется в процессе решения практических задач – главным образом на вычисление площадей и объемов криволинейных фигур, а дифференциальное – как процедура нахождения касательных, что связано с проблемой вычисления мгновенной скорости в механике и т. д. То есть каждый раз в этих случаях решаются конкретные прикладные задачи. А решение прикладных задач и фундаментальных подчинено разным системам ценностей. Прикладная дисциплина должна дать метод, тогда как от фундаментальной требуется доказательство, приемлемое по канонам своего времени.

Существенно, что Архимед понял, что получил *два результата* – нашел площадь (объем) криволинейных фигур и решил эти задачи новым методом, которым, как он проницательно заметил, возможно, впоследствии можно будет пользоваться и для решения других задач:

«Он [этот метод] может принести математике немалую пользу; я предполагаю, что некоторые современные нам или будущие математики смогут при помощи указанного метода найти и другие теоремы, которые нам еще не приходили в голову» (Архимед 1962, 299).

В дальнейшем объемы тел вычисляли Кеплер, Кавальери, Ферма и другие математики. Однако общего метода ими не было создано, для каждого случая приходилось искать свои приемы. Пойа, утверждающий, что Архимед открыл «ту ветвь науки, которую сегодня мы называем интегральным исчислением», склонен смотреть на историю с позиции современного знания. Разумеется, Архимед понимал, что метод, которым он вычислял площади и объемы фигур, мог пригодиться и для решения других задач, которые современная ему наука не могла сформулировать. Но сейчас, когда мы знаем, как именно формировалось исчисление, мы видим, что одни математики подхватывали идеи Архимеда о решении конкретных задач, а другие (Кавальери, например) понимали, что нужно создавать и метод. Однако и у Архимеда, и у Кавальери речь шла о методе вычисления *площадей* и *объемов*, а не об исчислении интегралов. Кавальери еще не мог осознать необходимость построения нового (интегрального) исчисления, ибо для создания исчисления нужно было сначала обнаружить, что этот же самый метод позволяет решать и другие задачи, что привело к формированию понятия интеграл, а потом и к тесно связанному с ним понятию дифференциала, с помощью которого решался другой класс задач. Это осознание появится только в работах Ньютона и Лейбница.

Рассмотрим вторую группу вопросов – о дальнейшем пути формирования исчисления. Кеплер, Кавальери, Ферма и другие математики 1) повторили решения задач Архимеда, 2) вычислили объемы гораздо большего числа фигур и, кроме того, 3) Кавальери поставил задачу создания метода нахождения кубатур и квадратур.

Этап в совершенствовании интегральных методов составило сочинение И. Кеплера «Новая стереометрия винных бочек преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». В первой части работы приводятся и доказываются результаты, найденные Архимедом, а также определяется объем 87 новых тел. Кеплер не пользовался греческим методом исчерпывания, а исходил из инфинитезимальных соображений. Эти же соображения он использовал для описания движения планеты Марс. При этом Кеплер отбросил многовековую традицию – полагать, что планеты движутся по *круговым* орбитам. Он показал, что все расхождения с наблюдениями исчезают, если считать, что планеты движутся по *эллиптическим* орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Но для подтверждения этого закона ему нужно было уметь вычислять площадь сектора эллипса. Эту задачу не умели решать ни древние, ни его современники. Для того чтобы сформулировать и подтвердить вычислениями этот закон движения планет, Кеплер, во-первых, заменил изучение изменения площади сектора эллипса изучением изменения пропорциональной ей площади сектора круга, вычислять которую умел еще Архимед и, во-вторых, ввел новый элемент, отсутствующий у его современников, – «сумму радиус-векторов» (Медведев 1974, 50–51).

У Кеплера, таким образом, был внешний «потребитель», – астрономия, в которой он, как и Аристотель в статике, выступил новатором. Астрономия представляла основной интерес для Кеплера, а математика выступала как средство решения астрономических задач. Важно отметить, что Кеплер фактически работает в математике как в прикладной науке, в соответствии с представлением о строгости этой группы наук (исследований), к тому же он имел большой опыт вычислительной работы, в которой, как пишет Г. Цейтен, «приобрел умение успешно пользоваться понятием бесконечно малой величины, хотя ничем, кроме самого названия, он и не пояснил столь трудного в логическом отношении понятия. Отбрасывание высших степеней малых величин в приближенных числовых вычислениях практически научило его тому, какие величины можно отбрасывать и при точных расчетах. Во всяком случае в его работах, особенно астрономических, числовые и инфинитезимальные расчеты часто тесно связаны между собой» (Цейтен 1933, 242). Кеплер совсем отказывается от доказательств при помощи метода исчерпывания. И хотя он считает их полными и строгими, однако полагает возможным обойтись без них, заменив их инфинитезимальными соображениями. Существенно, что самый смысл косвенного доказательства он видит именно в такой замене и прямо пишет, что как раз составление геометрических фигур из бесконечно малых элементов и нахождение искомой величины из сравнения таких элементов «и имеет в виду архимедово приведение к нелепости» (Медведев 1974, 52).

Для определения площади круга Кеплер полагает, что «окружность имеет столько частей, сколько в ней точек, т. е. бесконечно-большое число; каждая такая часть может быть принята за основание равнобедренного треугольника; все треугольники эти имеют общую вершину в центре. Треугольник ABC имеет площадь, равную площади круга» (Никифоровский 1985, 140). В античном доказательстве этой теоремы используется метод исчерпывания – площадь криволинейной фигуры заменяется, т. е. исчерпывается прямолинейной площадью, но этот процесс не доводится до конца. Удвоение числа сторон вписанного многоугольника происходило до тех пор, пока разность между нею и площадью круга не делалась менее некоторой произвольной (но не бесконечно-малой) площади. Доказательство заканчивалось приведением к абсурду. Кеплер прямо переходит к предельному случаю многоугольника с бесконечно-большим числом сторон, доводя исчерпывание сразу до конца, и получает искомую площадь, не прибегая к громоздкому способу косвенного доказательства. Как отмечает В. П. Шереметевский, часто бывает, что разработка новой области началась не с простейших ее оснований, а с более сложных и трудных частей, выдвинутых вперед практическими потребностями данного момента (Шереметевский 2010, 141). Действительно, исторически первыми решались задачи интегрального исчисления (чего требовали механика, астрономия и т. п. науки), и только гораздо позднее – задачи дифференциального, потребность в которых почти не ощущалась, но которые, однако, оказались более простыми, и в современной математике именно с дифференцирования начинается изложение математического анализа. Кроме этого, математический анализ сначала был создан трудами многих математиков как техника интегрирования и дифференцирования, и лишь позднее был обоснован Коши и Вейерштрассом.

Кеплер, таким образом, продолжил эстафету Архимеда, но иначе – не в рамках точных и строгих доказательств, как это было принято у древних греков, а в рамках прикладного приема для нужд астрономии.

Кавальери осуществил несколько нововведений в математике, главное из которых – учение о неделимых. Это учение восходит к Демокриту, обсуждалось в средние века, и Кавальери принадлежит «та своеобразная форма учения о неделимых, которая в его руках, а также у некоторых его последователей, оказалась пригодной для получения многих новых результатов в математике XVII века» (Медведев 1974, 57). Метод неделимых, развитый Кавальери, состоит в том, что он рассматривает геометрические объекты как образованные совокупностью неделимых элементов, размерность которых на единицу меньше размерности рассматриваемого объекта. Подход Кавальери отличается от действий Кеплера, который разлагал фигуру или тело на бесконечное число элементов той же размерности, что и сама фигура или тело – мы видели, что круг он сводил к треугольнику. Обращение к идее неделимых – это не что иное, как использование внешнего, философского в данном случае, ресурса. Были и другие нововведения: Кавальери вводит понятия касательных, высот, оснований, вершин, подобия, цилиндров и конусов, доказывает ряд теорем относительно введенных понятий, которые включают понятия и теоремы античной математики как *частные* случаи. Еще одно нововведение Ф. А. Медведев характеризует как фактическую разработку элементов аналитической геометрии. Эти элементы были и у древних греков, но подход Кавальери, как и в предыдущем нововведении, отличается универсализацией этих элементов. Сказанное можно рассматривать как смену интересов – античных авторов интересовали конкретные геометрические объекты – прямые, окружности, конические сечения и т. д., а Кавальери строит математику – координатную систему вообще, не привязанную к фигурам, вводит понятия о касательных, высотах, безотносительно к конкретным фигурам и т. д. Он перенес «центр тяжести» исследования с изучения конкретных фигур на построение системы, которая позволяла рассматривать сразу бесконечное число видов фигур. В еще большей степени перенос центра тяжести исследований относится к учению Кавальери о неделимых. Объект его интереса – не площади и объемы тел, а *метод*, с помощью которого можно это найти, т. е. метод интегрирования. Он делает интегрирование «предметом особых исследований, результаты которых могут быть затем применены в самых разнообразных областях» (Цейтен 1933, 249). В теории социальных эстафет М. А. Розова переход к новому референту (в данном случае, от площадей и объемов – к методу) называется рефлексивным преобразованием. Новое часто появляется как побочный продукт решения традиционных задач. Рефлексия, осознав значимость побочного результата, делает этот результат основным. Такой переход возможен потому, что рефлексия имеет описательную и целеполагающую компоненты – она описывает деятельность, а кроме этого, она есть указание *цели* действия. Однако, наблюдая какую-то конкретную деятельность и поставив задачу ее воспроизвести, человек оказывается перед необходимостью выделить в том, что делает другой, продукт *данной* деятельности. Рефлексия с этой точки зрения – это поляризация образцов, воспроизводимых в рамках той или иной эстафетной структуры (Розов 2006, 233). Переход от одной поляризации к другой – это рефлексивное преобразование. Сейчас, зная весь длинный и извилистый путь формирования интегрального исчисления, особенно ясно становится, что ни Архимед, ни Кеплер, ни многие другие математики не могли поставить задачу создания исчисления, тогда как постановка задачи на вычисление площадей и объемов криволинейных фигур представляется без труда.

Прежде чем перейти к непосредственным создателям исчисления, Ньютону и Лейбницу, кратко рассмотрим работы английских математиков Грегори и Барроу. Грегори поставил перед собой задачу создать общий метод, позволяющий решать широкий круг вопросов, которые сейчас относят к анализу бесконечно малых. «Наряду с обычными операциями математики того времени – сложением, вычитанием, умножением, делением и извлечением корня – он общим образом, правда, в геометрическом одеянии, вводит понятие сходящихся к одному пределу пары последовательностей, или, другими словами, принцип вложенных интервалов для того, чтобы получать новые, неизвестные величины, которые нельзя найти при помощи указанных пяти операций» (Медведев, 1974, 78). Грегори сделал попытку построить общую теорию рядов, основанную на понятии предела, а также осознал взаимно обратный характер задач на касательные и задач на квадратуры. Идея связи дифференцирования и интегрирования выражена у Грегори *в геометрической форме* в виде взаимной связи длины дуги кривой и площади под этой кривой. Современные историки науки высоко оценивают заслуги Грегори в создании математического анализа. Поставив вопрос, почему же имя Грегори долго занимало очень скромное место в истории анализа, Медведев пишет, что все его рассуждения имели словесно-геометрическую форму, и именно эта форма не позволила как Грегори, так и многим другим выдающимся математикам того времени осознать всю общность содержания полученных ими в геометрической форме результатов и создать новое исчисление, как это сделали Ньютон и Лейбниц (Медведев 1974, 80). В рамках геометрических представлений Грегори достиг той вершины в инфинитезимальных исследованиях, которой вообще можно достичь. Медведев пишет, что Грегори построил, так сказать, геометрический анализ, завершив тем самым то, что было начато Архимедом. «Однако такой геометризованный анализ оказался нежизнеспособным. Словесно-геометрическая форма изложения, к тому же сопровождавшаяся обычно апагогическими доказательствами, практически изжила себя» (Медведев 1974, 80). Замечания Медведева о геометрическом языке и о наличии доказательств там, где нужны алгоритмы, важны.

В математике с самого начала формируются два конструктора – арифметический и геометрический. Интегрирование – это новое исчисление, новый математический конструктор, но долгое время разработка интегрального исчисления выглядела как решение традиционных геометрических задач. Нужно было осознать, что строится *новое исчисление*, а не просто решаются геометрические задачи. Для вычисления площадей, объемов и решения других задач формирующегося исчисления нужны были не столько доказательства (что требуется в «чистой» математике), сколько правила, алгоритмы. На первый взгляд выглядит парадоксальным то, что доказательства «мешают» понять, что делает математик (Грегори), но если принять во внимание, что чистая и прикладная математика следуют разным ценностным установкам, то парадокс исчезает.

Рассматривая вклад Барроу в анализ, обычно отмечают широкое введение *кинематических* соображений, которое имеет давнюю традицию – ведь еще Архимед и другие древнегреческие математики рассуждали подобным образом. При изучении касательных к кривым кинематические соображения широко использовали Роберваль и Декарт. Бурбаки писали, что Барроу выделяется из предшествующих исследователей тем, что он задумал «сделать из одновременных изменений различных величин как функций универсальной независимой переменной, принятой за «время», основу исчисления бесконечно малых, изложенного геометрически» (Бурбаки 1963, 181). Второе, что отмечают у Барроу – это наличие совершенно общего понятия функции, которое можно получить, исходя из геометрических представлений. Он рассуждает не о касательной к *отдельной* кривой или о квадратуре *конкретной* кривой, а формулирует и доказывает свои предложения сразу для *любой*, в современном языке, дифференцируемой функции. Третье – это отчетливое установление взаимозависимости дифференцирования и интегрирования. Здесь опять существенную роль играли нужды кинематики, т. е. исследование понятия движения. Задача ставилась так: как, с одной стороны, получить путь, пройденный точкой, зная время и скорость ее движения, а с другой – выразить скорость движения, зная пройденный путь и затраченное время. Формулировка проблем производилась в кинематической форме, а их решение осуществлялось в геометрическом духе. Однако история сыграла с Барроу злую шутку. Сейчас известно, что операция дифференцирования осуществляется проще. Но во времена Барроу операции интегрирования были разработаны более подробно, а методы определения касательных были менее известны. Поэтому Барроу преимущественно решает не задачи определения квадратур по данным о касательных, а, наоборот, из известных квадратур ищет способы определения касательных. Отдавая должное английскому математику, Вилейтнер пишет, что после работ Барроу все еще «недоставало систематического применения отношений двух исчезающих величин, ясной точки зрения на понятие функции и прежде всего, особого вычислительного алгорифма, который мог бы, при подходящем определении его формальных операций, оттеснить на задний план лишнюю работу мысли, ранее необходимую при отдельных инфинитезимальных исследованиях» (Вилейтнер 1960, 115–116)

Этот особый вычислительный алгоритм сложился в работах Ньютона и Лейбница. Выделим только некоторые моменты их деятельности, важные для понимания механизмов новаций в математике. Прежде всего, описывая математические работы Ньютона, историки науки говорят о *двух* типах результатов, полученных Ньютоном – вычислении площадей и методе (разложения функций в бесконечные ряды в одной из работ 1666 года). Медведев пишет, что интеграционные приемы, применяемые Ньютоном в этой статье, не новы, но в сочетании с широким алгебраическим подходом они получают новую качественную окраску (Медведев 1974, 99). Эта «новая качественная окраска» состоит в том, что частные приемы интегрирования перерастают по существу в *интегральное исчисление.* Метод, таким образом, становится основным результатом, и не сводится лишь к процедурам нахождения значений площадей и объемов. Причем, исчисление оказывается применимым не только к квадратурам кривых. Ньютон подчеркивает, что все задачи о длине кривых, об объемах и поверхностях тел, о положениях центров тяжести могут быть сведены, в конце концов, к вопросу о нахождении площади, ограниченной плоской кривой (Медведев 1974, 99), так что интегрирование вырастает в достаточно общий самостоятельный раздел математики. Интегральное исчисление, базирующееся на разложении функций в ряды, – это законченный *алгоритм*, позволяющий отнести заданной функции вполне определенное число, важный тем, что применим не только для нахождения площадей, но и целого ряда других величин (Медведев 1974, 100). «Под открытием интегрального исчисления в XVII в. следует понимать не введение нового понятия интеграла и способов его нахождения, а только открытие новых алгоритмов, позволяющих находить единообразным способом достаточно широкий класс квадратур или интегралов, как их стали называть позднее … Такими двумя основными алгоритмами явились тогда алгоритмы разложений в ряды и нахождение квадратур путем выражения их при помощи прямой математической операции – дифференцирования. Но для реализации последнего нужно было само интегрирование сделать особой математической операцией, а также разработать технически удобные средства ее осуществления» (Медведев 1974, 108), т. е. нужно было осуществить рефлексивное преобразование – сделать объектом исследования само интегрирование.

Первой опубликованной работой Лейбница по этим вопросам была его статья «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особенный для этого род исчисления» (1684) Он ввел определение дифференциала, предложил для него обозначение и сообщил *без доказательства* правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и степени. Эти правила не были чем-то новым в математике, ими более или менее осознанно пользовались все те, кто занимался тогда проблемами касательных, максимумов и минимумов и т. д. (Медведев 1974, 112). Тем не менее, эта заметка Лейбница довольно долго оставалась непонятой. Причина этого непонимания была в том, что сформулированные правила были «выставлены Лейбницем в качестве общего исходного пункта для всех инфинитезимальных исследований, … что связь их с символикой делает их основой исчисления, с помощью которого можно производить разнообразные инфинитезимальные исследования таким же образом, как исследования анализа конечной величины с помощью буквенного исчисления» (Цейтен 1933, 409). Здесь очень важно обратить внимание на следующее: новаторство Лейбница состоит не в том, что он предложил *новые правила*, а в другом *осознании* этих правил. Для него правила из *средств* нахождения определенных геометрических величин (максимумов, минимумов, касательных) превратились в самостоятельный результат, *основу исчисления*, с помощью которого можно было производить «разнообразные инфинитезимальные исследования», а не только те, которые привели к этим правилам. Осуществление этого рефлексивного преобразования и делает Лейбница одним из авторов дифференциального и интегрального исчисления. Это новаторство долго оставалось непонятым именно потому, что в его рамках предлагалось нечто принципиально новое: до этого времени решали конкретные задачи, мало задумываясь об общих методах.

Ньютон развивал интегральное исчисление не только в математических заметках, но и в своем основном труде по механике «Математические начала натуральной философии». Медведев пишет, что историки *математики* либо совсем не уделяют внимания *математическому* содержанию «Начал», либо – очень мало. «Не следует думать, что Ньютон к создаваемой им механике применил какой-то готовый математический аппарат математики. Такого аппарата тогда не было (хотя имелись все предпосылки для его построения), и Ньютону приходилось вести параллельную работу: развивать соответствующие механические соображения и разрабатывать необходимые для этой цели математические предложения. Поэтому в его изложении на протяжении всей книги механика чередуется с математикой» (Медведев 1974, 114–115). Но математике все же отводится второстепенная роль – математические идеи вводятся тогда, когда они нужны для развития рассматриваемого вывода механики. Ньютона упрекают в том, что он получил свои результаты в механике при помощи средств анализа, но изложил их на геометрическом языке. Однако анализа в современном смысле тогда не было, и если Ньютон хотел быть понят современниками, то он не мог не пользоваться геометрическим языком. Еще не было слова «интеграл» и его заменял тогдашний его эквивалент – площадь кривой. Однако использование Ньютоном геометрического языка в «Началах» не означает, что он следовал античным образцам. К примеру, везде, где древний математик использовал бы метод исчерпывания, Ньютон пользовался методом пределов. Кроме этого, для решения дифференциальных уравнений Ньютон использует бесконечные ряды, постоянно обращается к произвольным показателям степеней, чего совершенно не знали древние греки. Следует понимать так же, что аналитические методы еще не были разработаны в полной мере и, кроме того, геометрические методы порой предпочтительнее аналитических.

Подводя итоги того, что сделали Ньютон и Лейбниц для создания исчисления, Медведев говорит, что фактические достижения Лейбница не так значительны и заметно уступают достижениям Ньютона. Однако умение Лейбница четко ставить общие проблемы и намечать пути их решения сыграло огромную роль в развитии анализа вообще и теории интегрирования в частности (Медведев 1974, 125). К результатам Лейбница можно отнести идею взаимной обратности дифференцирования и интегрирования, идею алгоритмичности новых исчислений при надлежаще выбранной удобной символике, идею новых трансцендентных функций, появляющихся при интегрировании, идею применения комплексных чисел и т. д. Ньютон раньше Лейбница пришел почти ко всем этим результатам, его результаты богаче по содержанию, но «Лейбниц оказал на развитие анализа, видимо, большее влияние. Причины этого многообразны. Во-первых, последний, будучи математиком-самоучкой, не был обременен классическим тогда наследием геометрического склада мышления, так что ему легче было перейти к новым аналитическим представлением. Не был он приучен и к требованиям древнегреческой строгости, толкавшим Ньютона на все новые и новые поиски способов обоснования, вплоть до разработки довольно четкой, но все же преждевременной тогда теории пределов. Во-вторых, методы Лейбница были облечены в такую форму, в которой их относительно легко можно было усвоить и применять затем чуть ли не механически, соблюдая определенные правила для простых операций; алгоритмичность методов Лейбница была важна именно в эту эпоху, когда к занятиям математикой стали привлекаться значительно более широкие круги людей (Медведев 1974, 125–126).

Историко-научные факты формирования понятия интеграла дают богатый материал для анализа проблемы новаций в математике вообще. Мы видели, что новое исчисление формировалось в процессе решения традиционной задачи нахождения площадей и объемов (криволинейных фигур и тел), никто не ставил и не мог поставить задачу создания нового исчисления, и, тем не менее, исчисление возникло. Эта ситуация хорошо схватывается различением незнания и неведения, предложенным М. А. Розовым (Степин, Горохов, Розов 1995, 116–119). Незнание – это когда нам не известны конкретные значения каких-то величин, допустим, мы не знаем, сколько людей является подписчиками той или иной газеты, но знаем, как это можно узнать. Неведение – это когда вообще не известно, существуют ли те или иные объекты, например, группа в математике, вирус в биологии и т. д. Галуа, например, развил представление о новом математическом объекте – группе подстановок корней уравнения, когда он решал традиционную задачу – о разрешимости уравнений выше 4 степени в радикалах. Представления о группе было *средством* при решении этой задачи. Введение понятия группы в математику произошло благодаря рефлексивному преобразованию результатов решения традиционной задачи – группа стала основным объектом исследования. Разрешение ситуации с неведением, таким образом, происходит благодаря рефлексии, когда ученый осознает, что он не только решил традиционную задачу, но и создал новый объект. Выше уже было отмечено, что в истории формирования интегрального исчисления было несколько моментов, когда математикам приходилось осознавать, что наряду с конкретными результатами – площадью или объемом фигуры или тела, получался еще один результат – *метод*, которым были найден данный результат, и который может быть применен для решения задач, отличных от тех, которые привели к его созданию. В данном случае создание исчисления – это результат не одного рефлексивного преобразования, а нескольких, но решающим было преобразование, осуществленное Лейбницем, когда он сделал основным результатом своего исследования не вычисление различных геометрических величин (правила были при этом *средством*), а сами правила, которые и составили исчисление, как новый математический результат.

Новое исчисление сначала выполняло некоторую подчиненную роль – было *средством* решения задач геометрии. В процессе его формирования использовались, как мы видели, то представления механики, то философские конструкции (метод Демокрита), то в рамках собственно математической деятельности допускались «сомнительные» операции с бесконечно малыми (отбрасывали бесконечно малые высших порядков), т. е. это исчисление, имея *прикладной* характер, и формировалось по «стандартам» прикладной науки, для которой главное, чтобы метод работал. Только Лейбниц открывает новую эстафету, когда вводит понятие дифференциала, предлагает правила дифференцирования и делает эти правила *исходным* пунктом для всех инфинитезимальных исследований.

Когда математики поняли, что создан могущественный метод, собственно, даже не просто метод, а дифференциальное и интегральное *исчисление*, введены новые понятия – дифференциал, дифференцирование, неопределенный интеграл, определенный интеграл, они осознали, что это исчисление необходимо переформулировать по канонам математики, превратив его в нечто большее, нежели приложение для решения задач механики, астрономии, оптики и других наук. Так возникла проблема обоснования анализа. Эйлер предложил исчисление нулей, но главное сделали Коши и Вейерштрасс – они развили представления об интегрировании и дифференцировании через понятия предела, т. е. построили это исчисление как объект чистой математики, а не прикладной.

Мы видели, что существенную роль в формировании интегрального исчисления играет ответ на запросы либо геометрии, либо – других наук, таких как астрономия, механика или оптика. Тесное взаимодействие математики и других наук – это не частный случай, а скорее, норма в математике и других науках. Чтобы описать эту особенность формирования и функционирования математики, воспользуемся представлениями о дисциплинарных комплексах, развитыми М. А. Розовым. «Группы наук, у истоков которых лежит рефлексивное преобразование одних и тех же знаний, мы будем называть дисциплинарными комплексами» (Розов 2006, 355). Розов описывает разные виды комплексов, нас будут интересовать *программно-предметные* комплексы. В качестве примера такого комплекса Розов приводит связь дисциплин – оптики, акустики и им подобных, с одной стороны, и – теорию колебаний, с другой. Дисциплины первой группы строят знания о тех или иных явлениях природы, вторые – разрабатывают методы или подходы, необходимые для получения этих знаний. Математика, как мы видели, разрабатывая методы вычисления площадей и объемов криволинейных фигур, отвечает на запросы астрономии, механики, оптики и других наук. Это означает, что математика является программной наукой комплекса, а астрономия, механика и т. п. – это предметные науки комплекса. Дисциплины выделенных видов не существуют и не могут существовать друг без друга – они связаны в своем историческом развитии и представляют собой пример программно-предметной симметрии. Эта симметрия обычно нарушается в ходе обособления названных дисциплин, но ее следы всегда присутствуют в соответствующих системах знания (Розов 2006, 360). Замечание о том, что предметные и программные дисциплины не могут существовать друг без друга, очень важно как для понимания механизмов новаций в математике, так и для ответа на вопрос о предмете математики и об отношении математики к действительности. В самом деле, не описывая природу непосредственно, математика, через предметные науки, тесно связана со многими областями реального мира – с колебанием струны, с полетом снарядов, с экономикой и т. д.

Библиография

Архимед, (1962) *Сочинения,* пер. И. Н. Веселовского и Б. А. Розенфельда. Москва.

Бурбаки, Н. (1963) *Очерки по истории математики*. Москва.

Вилейтнер, Г. (1960) *История математики от Декарта до середины XIX столетия.* Москва.

Медведев, Ф. А. (1974) *Развитие понятия интеграла.* Москва.

Никифоровский, В. А. (1985) *Путь к интегралу*. Москва.

Перминов, В. Я. (1986) *Развитие представлений о надежности математического доказательства.* Москва.

Пойа, Д. (1975) *Математика и правдоподобные рассуждения*. Москва.

Розов, М. А. (2004) *Теория и инженерное конструирование, На теневой стороне.* Материалы к истории семинара М. А. Розова по эпистемологии и философии науки в Новосибирском Академгородке. Новосибирск.

Розов, М. А. (2006) *Теория социальных эстафет и проблемы эпистемологии.* Смоленск.

Степин, В. С., Горохов, В. Г., Розов М. А. (1995) *Философия науки и техники.* Москва.

Цейтен, Г. (1933) *История математики в XVI и XVII веках.* Москва – Ленинград.

Шереметевский, В. П. (2010) *Очерки по истории математики.* Москва.

Netz R., Noel W. (2007) *The Archimedes Codex.* Da Capo Press.