Вопрос о характере касания прямой и круга как проблемная точка развития древнегреческой геометрии в конце V — начале IV века до н. э.

А. И. Щетников

§ 1. Введение

В популярной литературе по истории математики часто встречается мнение, что логическая структура греческой геометрии, в которой доказываются даже очевидные факты и в которой непрерывная цепочка теорем разворачивается из небольшого числа аксиом и постулатов, была создана в конце V — начале IV вв. до н. э., чтобы противостоять нескончаемым придиркам софистов. Вот что пишет об этом, к примеру, В. П. Шереметевский (1940, с. 16):

> Увлекаясь спором для спора, приёмами привычной профессии, софист готов оспаривать всякое положение, хотя бы истину вполне очевидную, если её не защитят прочной, непрерывной цепью правильно построенных силлогизмов. Интерес к самому предмету спора отходит на задний план, когда толпа чутких слушателей с живейшим участием следит за всеми приёмами и изворотами диалектической борьбы. Истины математики отличаются такой простотой, так сказать, прозрачностью содержания, такой осязательной убедительностью, что дать им соответственно строгое доказательство, выстроить их в непрерывный ряд друг друга обуславливающих положений, сделать их неуязвимыми для нападения самой придирчивой критики — казалось и сравнительно лёгкой и наиболее настоятельной задачей рассматриваемой эпохи. Она как раз соответствовала направлению мысли, господствующим интересам учёных и общества начала IV века.

Надо сказать, что такая картина возникновения дедуктивной системы геометрии в значительной мере принадлежит воображению авторов популярных книг и нигде в античных источниках не зафиксирована. Чтобы понять, как взаимодействовали между собой математика и софистика (которая была отнюдь не только искусством спора!), и к каким преобразованиям в структуре математики это взаимодействие привело, мы рассмотрим в этой статье одну реально известную по источникам область соприкосновения софистики, философии и математики, по времени относящуюся к концу V — началу IV в. до н. э.

В этом исследовании я буду активно пользоваться эпистемологическим методом рациональной реконструкции истории, понимая его в том же ключе, в котором его развил и применял Имре Лакатос в *Доказательствах и опровержениях* (1967). Я попробую описать воображаемую, рационально реконструированную историю одной геометрической теоремы, наложив этот воображаемый пласт на историю реальную, к сожалению — известную нам по весьма скудным свидетельствам. Соответственно этой установке, я отнюдь не намереваюсь утверждать, что те рассуждения и доказательства, которые будут разобраны ниже, действительно выполнялись древнегреческими математиками рассматриваемой эпохи; однако я буду настаивать на том, что они могли выполняться, поскольку задействованные в них представления и методы были присущи греческой мысли и могут быть подтверждены имеющимися у нас источниками. Следуя методу *Доказательств и опровержений*, я буду интересоваться не только «безошибочными окончательными результатами», которые были когда-то получены греками и с тех пор входят в школьный учебник геометрии, но также и теми «ошибочными и тупиковыми ходами» (с точки зрения авторов учебников, конечно), благодаря которым стало возможным возникновение *Начал* Евклида и всей последующей геометрии.

§ 2. Тезис Протагора «знание есть ощущение» в применении к геометрии

История донесла до нас имена двух софистов, так или иначе связанные с математикой: это самый знаменитый софист Эллады Протагор из Абдеры (480–411 до н. э.) и его младший «коллега по цеху» Гиппий из Элиды. Их отношение к математике в некотором смысле противоположно.

Из диалогов Платона *Гиппий больший*, *Гиппий меньший*, *Протагор* мы узнаём, что Гиппий был сведущ во всех пифагорейских дисциплинах — логистике, геометрии, астрономии, музыке, и учил этим наукам других. Из его математических открытий известна так называемая квадратриса — механическая кривая, изобретённая для решения задачи о делении угла в произвольном отношении (частный случай этой задачи — знаменитая трисекция угла).[1]

Напротив, Протагор никогда не занимался математикой специально, не считая её хоть сколько-нибудь полезной для домашних и общественных дел. В начале диалога Платона *Протагор* есть примечательная сцена, когда Протагор, поглядывая на Гиппия, говорит Сократу:

> «Ведь софисты просто терзают юношей, так как против воли заставляют их, бегущих от упражнений, заниматься этими упражнениями, уча их вычислениям, астрономии, геометрии, музыке» (318de).

И тем не менее, Протагор был знаком с двумя крупнейшими натурфилософами и значительными геометрами своего времени — Анаксагором из Клазомен (497–428 до н. э.) и Демокритом из Абдеры.[2] Из диалога Платона *Теэтет* мы знаем, что младшим

---

[1] О задаче трисекции угла см. Белозёров 1975, Прасолов 1997.

[2] Вопрос о годах жизни Демокрита весьма тёмен и запутан. Согласно Евсевию, Демокрит родился в 70 олимпиаду (ок. 498), одновременно с Анаксагором. Диоген Лаэрций сообщает (IX, 41), что Демокрит, по его собственному утверждению в *Малом диакосмосе*, был моложе Анаксагора на 40 лет, а также о датах рождения Демокрита по Аполлодору (ок. 460) и по Трасиллу (ок. 470). Для смерти Демокрита несколько авторов указывают 94 олимпиаду (ок. 402). При этом сообщается, что он умер в глубоко старости, прожив то ли 90, то ли 100, то ли даже 104 года. Ещё существует легенда, по которой Протагор был носильщиком дров, а в люди его вывел Демокрит, увидав, каким образом тот связывает дрова в

товарищем Протагора был ещё один известный геометр, Феодор из Кирены, у которого по сообщению Диогена Лаэрция (II, 103; III, 6) учился математике Платон. Общаясь с этими геометрами, Протагор был в курсе новейших математических исследований. Он даже выступил с критикой этих исследований в сочинении *О математических науках* (*Περὶ τῶν μαθημάτων*), упоминаемом Диогеном Лаэрцием (VII, 55).

Главный тезис философского учения Протагора — «человек есть мера всех вещей, существующих — что они существуют, несуществующих — что они не существуют» (Платон, *Теэтет*, 152a). Из этого тезиса проистекает вывод о том, что знание есть ощущение (*ἐπιστήμη ἐστιν ἢ αἴσθησις*). Под ощущением или восприятием здесь подразумевается то, что мы можем воспринять нашими чувствами: зрением, слухом, обонянием, вкусом, осязанием. Этот вывод надо понимать как суждение здравого смысла: я вижу, что число камней в кучке равно семи, и я знаю, что они равно семи, и т. п.

Ниже я попробую, сообразуясь с тезисом Протагора о восприятии, выделить несколько типов математических утверждений по отношению к тому, как мы воспринимаем их истинность, и попытаюсь понять, как Протагор мог бы отнестись к утверждениям каждого из этих типов. К сожалению, источники наших сведений о Протагоре весьма скудны; однако в сочинениях Аристотеля всё-таки сохранились два фрагмента, непосредственно относящиеся к нашей теме.

1. Непосредственно очевидные утверждения. Ясно, что приводить примеры я могу только на свой страх и риск, поскольку то, что одному человеку представляется очевидным, другому может вовсе даже не показаться таковым. И всё же, вот несколько примеров: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны», «Прямая — это кратчайшее расстояние между двумя точками», «Диаметр делит окружность пополам», «Два перпендикуляра к одной прямой при их продолжении не пересекаются». Исходя из тезиса Протагора, для этих утверждений не надо искать доказательства, поскольку мы и так их уже знаем. Возможно, что именно к Протагору относится следующее возражающее суждение Аристотеля из *Второй аналитики* (87b35–37):

> Даже если бы и можно было воспринимать чувствами, что треугольник имеет углы, равные двум прямым, мы всё равно искали бы доказательство, а не знали бы, как говорят некоторые.

(Согласно Аристотелю, если хочешь иметь знание о чём-то, надо искать его доказательство; согласно Протагору, если ты узнал что-то посредством чувств, то никаких доказательств искать уже не нужно. Здесь надо помнить, что слово *ἀπόδειξις*, которым греки называли доказательство, восходит к судебной практике. Если судья видел, как было совершено преступление, требуются ли ему доказательства, что преступление было совершено? Протагор бы сказал, что нет, а Аристотель, что да: а вдруг судья в

вязанки. Если Демокрит родился в 460 г., то он был младше Протагора на 20 лет, и тогда эта легенда представляется очень странной. Сделать на основании всех этих сведений какие-то уверенные выводы о годах жизни Демокрита вряд ли возможно.

качестве свидетеля ошибся, приняв одного человека за другого? Поэтому такой судья должен не судить, а выступать на суде в качестве свидетеля.)

Тезис о непосредственном восприятии перечисленных выше утверждений не надо понимать в том смысле, что мы, к примеру, можем сравнивать углы в равнобедренном треугольнике на глаз с абсолютной точностью. Однако этого и не нужно делать: через восприятие у нас формируется умный образ (εἶδος, Gestalt) равнобедренного треугольника и понимание связи равенства сторон с равенством углов. Во всяком случае, мы знаем это равенство до всякого его доказательства, о чём и говорит тезис Протагора.

2. Неочевидные утверждения, истинность которых проясняется преобразованиями чертежа. Примеры: «Сумма углов треугольника равна двум прямым», «Параллелограммы на одном основании и под одной высотой равны между собой», «В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы», «Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны». Это классические теоремы, в которых некий неочевидный факт демонстрируется с помощью преобразований чертежа, опирающихся на очевидные геометрические утверждения, а также на не менее очевидные соображения типа «если две величины порознь равны третьей, то они равны между собой» и т. п. Как говорит Аристотель в *Метафизике* (1051a24–26):

> Почему углы в треугольнике составляют два прямых? Потому что углы, примыкающие к одной точке, равны двум прямым. Таким образом, если бы была выпущена прямая параллельно одной из сторон, то при взгляде на неё всё стало бы ясно.

3. Неочевидные утверждения о несуществовании. Классический пример: «Сторона и диагональ квадрата несоизмеримы». Что думал Протагор об этом замечательном открытии, мы к сожалению не знаем. Пифагорейцы искали общую меру стороны и диагонали, а их же собственные рассуждения привели их к выводу, что такой меры не существует. Стало быть, когда они её искали, они предполагали, что она есть. Но из того, что люди нечто предполагают, ещё не следует, что они это знают; ведь предполагая, можно и ошибиться. Деление отрезков на мельчайшие части воспринимается нами весьма туманно и неопределённо. И если кто-то считает, что всякие два отрезка должны иметь общую меру, то это его мнение основано не на восприятии, но на предубеждении. Впрочем, граница таких суждений всегда зыбка и размыта. Во всяком случае, у Протагора не было никаких оснований считать их противоречащими восприятию и тем самым ложными. Правда, несуществующие «в себе» вещи не существуют «для нас» в этом случае не потому, что мы не можем их воспринять, а потому, что мы путём логических доводов убеждаемся в невозможности их существования.

4. Утверждения, явно противоречащие нашему восприятию. Самый яркий пример такого утверждения: «Круг соприкасается с прямой в точке». У Протагора были все основания считать это утверждение ложным! Ведь все мы видим, что при касании прямой и круга возникает некое трудно различимое слияние, совсем не похожее на точку. И Аристотель в *Метафизике* (998a1–4) сообщает:

> Чувственно воспринимаемые линии не таковы, как те, о которых говорит геометр; ибо нет такого чувственно воспринимаемого, что было бы прямым (εὐθύ) или закруглённым (στρογγύλον) именно таким образом; ведь круг соприкасается с линейкой не в точке, а так, как указывал ПРОТАГОР, возражая геометрам.

§ 3. Две теоремы о взаимном положении прямой и круга у Евклида

Вопрос о взаимном расположении прямой и круга при касании решается во 2 и 16 предложениях III книги *Начал* ЕВКЛИДА. Доказательства этих предложений проводятся схожим способом и опираются на один и тот же круг предложений I книги. Поэтому можно предположить, что в каком-то варианте *Начал*, написанном до ЕВКЛИДА, эти два предложения стояли рядом и составляли один блок.

Предложение III.2. *Если на окружности взять какие-либо две точки, то прямая, соединяющая эти точки, попадёт внутрь круга*. В самом деле, пусть такая прямая AB попадёт вне круга. Тогда возьмём на ней точку C и проведём из центра прямую OC, пересекающую дугу AB в точке D (рис. 1). Поскольку $OA = OB$, тем самым $\angle OAC = \angle OBC$ (предложение **I.5** — углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой). Далее, $\angle OCB > \angle OAC$ (предложение **I.16** — в треугольнике внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного). Тем самым $\angle OCB > \angle OBC$. Но тогда $OB > OC$ (предложение **I.19** — в треугольнике против большего угла лежит большая сторона). С другой стороны, $OC > OD$ (часть и целое). Но $OD = OB$ как два радиуса одной окружности. Получается, что меньшее равно большему, что нелепо. В силу возникшего противоречия прямая AB не может попасть вне круга. «Подобным же образом докажем, — говорит ЕВКЛИД, — что она не попадёт и на саму окружность; значит, внутрь круга».

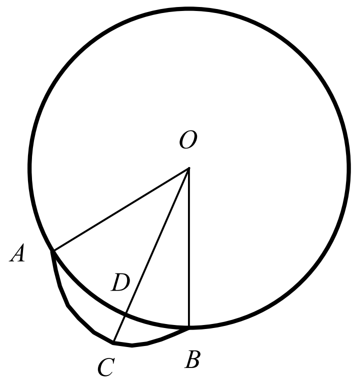

Рис. 1

Предложение III.16. В первой части этого предложения ЕВКЛИД доказывает, что *концевой перпендикуляр к диаметру «падает вне круга»*. В самом деле, пусть он падает внутри, как AB; соединим OB (рис. 2, *а*). Поскольку $OA = OB$, тем самым

$\angle OAC = \angle OBC$ (предложение **I.5**). Но $\angle OAB$ прямой по условию, поэтому $\angle OBA$ тоже будет прямым. Но в треугольнике два угла прямыми быть не могут (предложение **I.17**). Следовательно, концевой перпендикуляр к OA не упадёт внутри круга. «Подобным же образом докажем, — говорит Евклид, — что он не упадёт и на саму окружность; значит, вне круга».

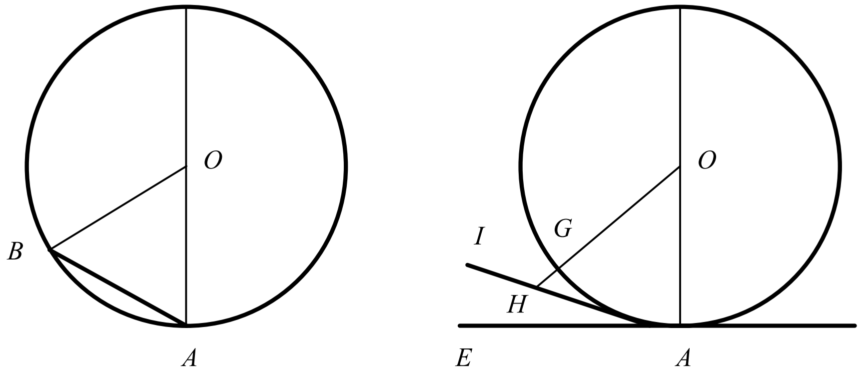

Рис. 2

Осталось доказать обратное утверждение: касательная, проходящая через конец радиуса, будет перпендикулярна к этому радиусу. Евклид формулирует это утверждение так: *«в промежутке между перпендикулярной прямой и окружностью не поместится другая прямая»*. В самом деле, пусть в промежутке между перпендикуляром AE и окружностью поместится прямая AI. Опустим на неё перпендикуляр OH (рис. 2, *б*). И поскольку $\angle OHA$ прямой, $\angle OAH$ меньше прямого, значит $\angle OAH < \angle OHA$ и $OH < OA$ (предложение **I.19**). С другой стороны, $OG < OH$ (часть и целое). Но $OA = OG$ как два радиуса одной окружности. Получается, что меньшее равно большему, что нелепо. Следовательно, в указанном промежутке не поместится никакая другая прямая.[3]

§ 4. Гипотеза о первоначальном обосновании утверждения «прямая касается круга в одной точке»

Чтобы Протагор мог возражать геометрам, нужно было, чтобы они уже выставили свой тезис о касании прямой и круга. Но откуда они сами узнали, что прямая соприкасается с окружностью в точке? Этот факт не может быть установлен чувствами, и постигается лишь на пути доказывающего рассуждения. Стало быть, сначала геометры каким-то образом попытались обосновать своё утверждение, и только потом Протагор стал им возражать.

[3] Далее в III.16 Евклид доказывает ещё одно утверждение: «Угол полукруга больше всякого острого прямолинейного угла, а остаток меньше». Это утверждение является непосредственным следствием второй части этой теоремы.

Правильно ли будет предполагать, что начальное рассуждение геометров о касании прямой и круга было похоже на представленные в § 3 доказательства Евклида? Похоже, что у нас имеются веские основания в этом сомневаться.

- Во-первых, за 16, 17, 19 предложениями первой книги *Начал* стоит разветвлённая сеть обоснований, которую ещё только предстояло развить — раньше в ней не было никакой необходимости; да и само использование этих предложений при доказательстве отнюдь не очевидно, и предполагает незаурядное владение техникой доказательства от противного.
- Во-вторых, понимание необходимости доказывать прямую и обратную теорему тоже представляет собой элемент развитой логической культуры.
- В-третьих, в первоначальном доказательстве речь должна была идти не о перпендикуляре к диаметру (ведь он оказывается касательной к кругу лишь по сопричастности), а о касательной как таковой. Стало быть, оно должно было начинаться со слов «пусть прямая касается круга своей протяжённой частью».

Я предполагаю, что первоначальное доказательство тезиса о касании круга и прямой в точке было в большей степени «философским», нежели собственно геометрическим, и велось по следующей схеме. Допустим, что прямая касается круга своей протяжённой частью. Протяжённая часть прямой линии — всегда прямая. А протяжённая часть окружности — всегда кривая. Но ведь прямое ни в коем случае не есть кривое, поскольку они являются противоположными качествами! Следовательно, этот вариант исключён. Остаётся единственный вариант: прямая касается круга в одной точке.

Рассуждающего так могут спросить: а что это такое — прямое и кривое, о которых он говорит как о противоположных качествах? Прямое и кривое (*εὐθὺ καὶ καμπύλον*) являются одной из противоположностей в пифагорейском списке десяти парных полярных начал, который приводит Аристотель в *Метафизике* (986a25).[4] Тем самым их различие могло предполагаться изначальным, о котором уже не надо спрашивать.[5]

Я полагаю, что сначала прямое и кривое, как и прочие геометрические объекты и их свойства, действительно никак не определялись. Ясное свидетельство тому, что геометры V в. до н. э. никаких определений своим объектам не давали, представляют собой следующие слова Сократа в *Государстве* (510cd):

> Я думаю, ты знаешь, что те, кто занимается геометрией, вычислениями и тому подобными занятиями, в любом своём исследовании предполагают известным чёт и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в таком же роде. Они принимают это за ис-

[4] Прямое и кривое противопоставляются в этом списке по общей парадигме «единое — многое», «определённое и неопределённое». Прямое может быть прямым единственным образом, а кривое может иметь большую и меньшую степень кривизны, — так же, как есть один покой и много степеней движения. При этом покой отнюдь не рассматривается как «наименьшая степень движения», и прямизна — как «наименьшая степень кривизны», поскольку они исходно мыслятся двумя противоположностями.

[5] О полярных противоположностях как одной из архаических основ доказательного рассуждения см. Lloyd (1966), Рожанский (1972, с. 170).

> ходные предположения и не считают нужным приводить для них объяснение (λόγος) ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этого, они разбирают уже всё остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения. [6]

Следующий вопрос: а откуда мы знаем, что рассуждение надо вести по схеме выбора из двух противоположностей? А вдруг прямое и кривое в малом совпадают? Ведь речь идёт о таких мельчайших предметах, которые нельзя разглядеть глазами. И ещё: а вдруг помимо протяжённых отрезков и не имеющих протяжения точек существует некий третий род, промежуточный между этими двумя? И уверены ли мы в том, что точки, не занимающие никакого места, вообще существуют?

Вопросы этого круга обсуждались двумя крупнейшими исследователями природы и известными геометрами, жившими с ПРОТАГОРОМ в одно время: АНАКСАГОРОМ из Клазомен и ДЕМОКРИТОМ из Абдеры. Созданные этими мыслителями учения о «незримо малом» развивались из одного корня, но в вопросе о безграничной делимости сущего оказались принципиально противоположными друг другу.

§ 5. Континуализм Анаксагора и пифагорейская теорема о бесконечной делимости отрезка

АНАКСАГОР был прежде всего физиком, и как всякий физик, он занимался объяснением земных и небесных явлений.[7] Из учения АНАКСАГОРА о критерии истины кое-что дошло до нас через сочинение СЕКСТА ЭМПИРИКА *Против учёных*:

> Физичнейший из физиков, АНАКСАГОР, дискредитируя ощущения, говорит: «Из-за их слабости мы не способны различать истину». В доказательство их недостоверности он ссылается на постепенное (παρὰ μικρόν) изменение цветов. Если взять два краски, чёрную и белую, и затем по капле вливать из одной в другую, то зрение не сможет различать постепенных перемен, хотя в природе они будут (VII, 90).

АНАКСАГОР не призывал отвернуться от явлений, как это делали философы элейской школы, но считал, что явления служат лишь отправной точкой для размышления о скрытой природе вещей: «явления суть зрение неявного (ὄψις τῶν ἀδήλων τὰ φαινόμενα)» (там же, VII, 140).

---

[6] Первые попытки определить прямое и округлое мы как раз встречаем в двух диалогах ПЛАТОНА. Во-первых, это реплика СОКРАТА из диалога *Менон* (74d) «Ты многие вещи называешь одним именем и говоришь, что все они не что иное, как фигуры, даже если они противоположны друг другу; так что же это такое, включающее в себя округлое (τὸ στρογγύλον) и прямое (τὸ εὐθύ), — то, что ты именуешь фигурами, утверждая, что округлое и прямое — фигуры в равной мере?» Во-вторых, это реплика ПАРМЕНИДА из диалога *Парменид* (137e): «Ведь округлое есть то, края чего повсюду одинаково отстоят от середины. А прямое — то, середина чего заслоняет оба края». Надо заметить, что в *Началах* ЕВКЛИДА слово στρογγύλον и производные от него ни разу не употребляются.

[7] АНАКСАГОРУ посвящено обстоятельное исследование И. Д. РОЖАНСКОГО (1972).

Анаксагору принадлежит оригинальное физическое учение об «универсальной смеси», согласно которому в любом веществе, каким бы чистым оно не казалось, присутствуют доли всех других первоначал, а называем мы вещество золотом или водой по преобладающему первоначалу. Число первоначал бесконечно, и «всё содержится во всём». С этим учением связана и концепция подобочастных (ὁμοιομερῆ), то есть таких сущностей, которые при любом делении на части остаются сами собой: любая часть золота — это золото, и любая часть воды — вода. Согласно этому учению,

> У малого нет наименьшего, но всегда ещё меньшее (ибо бытие не может перестать быть путём деления). Так же и у большого есть всегда ещё большее. И оно равно малому по множеству. Сама же по себе всякая вещь и велика, и мала (DK 59 B3).

Тезис Анаксагора «бытие не может перестать быть путём деления» может быть проиллюстрирован пифагорейской теоремой, доказательство которой изложено в схолии 1 к X книге *Начал* Евклида:

> Взяв равносторонний треугольник, они [пифагорейцы] делят его основание пополам и, отложив на одной из сторон отрезок, равный половине основания, проводят через точку прямую, параллельную основанию, так что отсечённый треугольник будет опять равносторонним. Разделив таким же образом его основание, они повторяют то же самое и никогда не могут достичь вершины треугольника. Ведь если достигнут, то половина основания полученного в тот момент равностороннего треугольника окажется равной каждой из сторон. Следовательно две стороны будут равны оставшейся, что нелепо.

О собственно математических занятиях Анаксагора мы знаем довольно мало. Витрувий упоминает трактат Анаксагора по теории перспективы (второй трактат на эту же тему под названием *’Ακτινογραφίη*, *Описание лучей*, написал Демокрит), а Плутарх — занятия Анаксагора квадратурой круга, когда он в 431 г. сидел в афинской тюрьме по обвинению в государственном преступлении — как человек, не признающий богов и преподающий учения о небесных явлениях.

Попытку восстановить содержание геометрии Анаксагора предпринял В. А. Янков (2003). Согласно этой реконструкции, интерес математиков круга Анаксагора сосредотачивался, прежде всего, на величинах подобных фигур и тел. Им же принадлежит постановка задачи удвоения куба и квадратуры круга.

Задача квадратуры круга безусловно связана если и не с проблемой касания круга и прямой, то, во всяком случае, с устройством дуги окружности «в малом», при бесконечном её делении, со «слиянием» этой дуги и хорды при бесконечном уменьшении последней. Спрашивается, к каким результатам приведёт процедура удвоения числа сторон вписанного многоугольника, в чём-то аналогичная описанной выше пифагорейской процедуре рассечения треугольников? Сольются ли когда-нибудь хорда и дуга, или они всегда будут охватывать сегмент круга, имеющий хотя и малую, но конечную высоту?

Анаксагор мог отвечать на такие вопросы, исходя из базовых предпосылок своего учения. Рассуждение, аналогичное приведённому в предыдущем параграфе, должно было привести его к выводу: прямое не может совпадать с кривым, хорда и дуга всегда будут различны. А это означает, что для конструктивного решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки нужно искать какой-то хитрый приём (ведь Анаксагор не знал, что эта задача с помощью циркуля и линейки не решается!). И именно такой хитрый приём стал искать геометр следующего за Анаксагором поколения, Гиппократ из Хиоса, известный по постановке и решению задачи о квадрировании луночек.

§ 6. Атомизм Демокрита как один из вариантов решения проблемы касания

Круг философских занятий Демокрита был поистине всеохватен,[8] однако в последующую историю он вошёл в первую очередь как создатель атомизма. Атомистическое учение была впервые выдвинуто Левкиппом, сведения о жизни которого крайне скудны (известно только, что он был учеником Зенона из Элеи), и развито его учеником Демокритом. Согласно базовой посылке этого учения, те, кто думает, что деление тела можно продолжать до бесконечности, ошибаются: ведь одновременное деление тела повсюду невозможно, поскольку оно привело бы к полному уничтожению этого тела, — а потому должны существовать некие последние неделимые (ἄτομα) и не имеющие частей (ἀμερῆ) тела, вечные и неуничтожимые.

С. Я. Лурье (1935) выдвинул гипотезу о том, что Демокрит различал физические и математические атомы; термин «атом» более относился к физике (атом имеет размеры и форму, он может быть шарообразным, кубическим или пирамидальным, иметь крючки и зацепы, но его невозможно разделить физически), а термин «амера» — к математике (амера не может быть разделена на части даже мысленно, хотя и имеет нечто общее с протяжёнными частицами).[9]

Что касается учения Демокрита об истине, то оно пронизано мыслью о противопоставлении чувственных восприятий, которые у всех различны, и единой истины, ни с какими ощущениями не схожей и познаваемой только разумом. Чувственные явления поверхностны, а истина скрыта в глубине, и нужен разум, чтобы проникать в эту глубину и добираться до того, что лежит в основе природы, то есть до «атомов и пустоты». Из того, что мёд одному кажется сладким, а мёд горьким, Демокрит делает вывод, что на самом деле он не сладкий и не горький. Вот два изречения Демокрита, которые приводит Секст Эмпирик в сочинении *Против учёных*:

[8] С содержанием учений Демокрита можно познакомиться по переводам А. О. Маковельского (1946) и С. Я. Лурье (1970).

[9] Обсуждение этой гипотезы см. Зубов (1951, 1965), Рожанский (1979, с. 314–329).

(VII, 135) Демокрит отвергает воспринимаемые явления (τὰ φαινόμενα ταῖς αἰσθήσεσι) и утверждает, что всё воспринимаемое соответствует не истине, но одному лишь мнению; по истине есть только атомы и пустота. «Условно сладкое, условно горькое, условно горячее, условно холодное, условен цвет, на самом деле — атомы и пустота».

(VII, 138) Есть два вида познания: одно с помощью чувств, другое посредством размышления. Из них познание посредством размышления он называет законнорождённым и приписывает ему достоверность в суждении об истине; познание же, полученное с помощью чувств, он называет незаконнорождённым и отрицает, что оно может дать устойчивую основу для распознания истины. Он говорит буквально следующее: «Есть два вида познания: одно законнорождённое, другое незаконнорождённое. К незаконнорождённому относится всё следующее: зрение, слух, обоняние, вкус, осязание. А к законнорождённому — скрытое от них». Далее, отдавая предпочтение законнорождённому перед незаконнорождённым, он прибавляет: «И незаконнорождённое не может при уменьшении ни видеть, ни слышать, ни обонять, ни вкушать, ни осязать, а ведь надо идти ко всё более тонкому».

Секст Эмпирик (VIII, 327) сообщает также, что Демокрит в своих *Канонах* решительно высказывался против аподиктического доказательства (по-гречески это одно слово ἀπόδειξις). Он же (VIII, 385) определяет аподейксис так:

Доказательство есть рассуждение (λόγος) по поводу связи, раскрывающей неявное через некоторые явления.

Если принять это определение буквально, то придётся заключить, что Демокрит должен был возражать уже против доказательств теоремы Пифагора или теоремы о равенстве вписанных углов (второй тип утверждений из § 2). Но без таких доказательств геометрия в принципе была бы невозможной.

Впрочем, решительные возражения Демокрита могли относиться только к аподейксису в физике, а не в геометрии. Поэтому попробуем смягчить требование и допустим, что для Демокрита недопустимыми в геометрии были доказательства, вынуждающие признать истину, не показывая, почему она такова. Граница между «проясняющими» и «вынуждающими» доказательствами вряд ли может быть проведена отчётливо, но «вынуждающие» доказательства как тип вполне возможно выделить; к этому типу в первую очередь относятся доказательства от противного.

Против каких аподиктических доказательств мог возражать Демокрит? С одной стороны, это знаменитые апории Зенона, в которых отрицается множественность сущего. С другой стороны, это такие математические теоремы пифагорейцев, как «Сторона и диагональ квадрата несоизмеримы» и «Прямая касается круга в одной точке».

Надо заметить, что приведённое выше доказательство существования атомов, приписываемое Аристотелем Демокриту, тоже является аподиктическим. А. О. Маковельский (1946, с. 78) высказал на этот счёт мнение, что аподиктические доказательства существования атомов могли принадлежать Левкиппу, вышедшему из Элейской школы, а Демокрит заменил их «другими аргументами опытного характера». Правда, что это за аргументы, Маковельский не указывает. По-видимому, дело здесь не в аргументах (ведь они обязательно будут аподиктическими), а в некоторой «умственной зоркости», которую призывал развивать Демокрит, хваливший Анаксагора за фразу о том, что «явления суть зрение неявного».

Когда Демокрит говорит, с одной стороны, что «ощущения ложны», с другой — что «истинное и являющееся — одно и то же (*τὸ ἀληθὲς καὶ τὸ φαινόμενον ταὐτόν ἐστι*)» (DK 55 A 113), не надо ловить его на противоречии: ведь здесь речь идёт о том, что для «умственно незрячего» ощущения будут ложными, потому что он видит в них поверхностное, а «умственно прозревший» — это тот, для кого потаённое становится явным. Поэтому дело не в косвенных доказательствах, а в том, чтобы так посмотреть на явления «умственным взором» и увидеть «атомы и пустоту».

В связи с нашими штудиями значительный интерес представляет и ещё один принцип Демокрита, согласно которому всё происходящее имеет свою причину. Оборотная сторона этого принципа такова: где нет причины, там не может быть и явления. В античной космологии, основываясь на этом принципе, милетец Анаксимандр (DK 12 A26), а вслед за ним элеат Парменид и Демокрит (DK 28 A44) учили, что Земля пребывает в равновесии в центре космоса вследствие «одинакового расположения по отношению к краям (*ὁμοίως πρὸς τὰ ἔσχατα*)»: Земля не будет двигаться ни в одну сторону, так как нет никакой причины, выделяющей это направление среди прочих.[10] Если перенести этот принцип в геометрию, то его с равным успехом можно применять для дополнительного обоснования очевидных утверждений (первый тип из § 2): углы при основании равнобедренного треугольника равны, так как нет никакой причины им быть неравными. Мы не знаем, рассуждал ли так Демокрит; но, во всяком случае, это рассуждение было бы вполне в духе его представлений о познании.

Из математических открытий Демокрита нам определённо известно только одно, но зато очень важное. Архимед во введении к *Посланию к Эратосфену о механических теоремах* сообщает, что Демокрит первый высказал утверждение о том, что конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида — третью часть призмы с тем же самым основанием и под той же высотой, но не доказал его; доказательство же нашёл Евдокс.

Можно предположить, что задача отыскания объёма пирамиды была поставлена в греческой науке кем-то из пифагорейцев. В пифагорейской космологии правильная четырёхгранная пирамида есть самое элементарное из всех тел, а потому вопрос о сравнении её объёма с объёмом какого-нибудь куба (например, вписанного с этой пирамидой в один шар) представлял для пифагорейцев особый интерес.[11]

[10] См. Зубов (1962, с. 25), Щетников (1994, с. 27).

[11] Правило для определения объёма усечённой пирамиды зафиксировано ещё в Московском папирусе. О реконструциях способов, которым египтяне могли к нему прийти, си. Лурье (1933), Bortolotti (1934–35), Нейгебауер (1937, с. 144–146), Раик (1958), Выгодский (1967, с. 66–72), Виленкин (1985).

Из материала, содержащегося в сочинении ПЛУТАРХА *Об общих понятиях* (1079d), можно заключить, что утверждение ДЕМОКРИТА «пирамида представляет собой третью часть призмы» было связано с разбиением пирамиды и конуса на тончайшие слои, параллельные основанию. С. Я. ЛУРЬЕ (1935) высказал предположение, что ДЕМОКРИТ разбивал конус и пирамиду на слои толщиной в одну амеру, а потом вычислял суммарный объём всех слоёв по формуле для суммы последовательных квадратов, которую он умел доказывать или по крайней мере выводить индуктивно. Можно предложить и другую гипотезу на этот счёт: для шести одинаковых пирамид, из которых складывается куб, результат очевиден, а на прочие пирамиды и конус он переносится с применением принципа КАВАЛЬЕРИ, когда сравниваемые тела рассекаются на тончайшие плоскости.

Среди сочинений ДЕМОКРИТА по математике ДИОГЕН ЛАЭРЦИЙ называет два сочинения по геометрии (*Περὶ γεωμετρίης* и *Γεωμετρικῶν*), одно — о числах (*᾿Αριθμοί*), несколько книг астрономического и картографического содержания, и ещё два трактата с интересными названиями: *Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν* в 2 кн. и *Περὶ διαφορῆς γνώμης ἢ Περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης*.

Название первого из этих двух трактатов можно понимать по-разному. В первом варианте понимания слово *ἀλόγων* относится к обоим существительным: *Об иррациональных линиях и [иррациональных] телах*. Однако «тело» здесь — это отнюдь не обычное *τὸ σῶμα* и не геометрическое *τὸ στερεόν*, но специфическое *τὸ ναστόν*, «полнота». В связанных с ДЕМОКРИТОМ свидетельствах это слово встречается обычно в словосочетании «*τάναστὰ καὶ τὸ κενόν*», синонимичном словосочетаниям «*τά ἄτομα καὶ τὸ κενόν*» (атомы и пустота), «*τὸ πλῆρες καὶ τὸ κενόν*» (полнота и пустота). Поэтому *τά ναστά* у ДЕМОКРИТА — это не просто «тела», а «плотные неделимые тела», «атомы». Но тогда прилагательное *ἀλόγων* относится лишь к первому существительному *γραμμῶν*, потому что неделимые тела, в отличие от линий, не могут быть «иррациональными» в математическом смысле. Поэтому название данного трактата можно истолковать как *Об иррациональных линиях и [неделимых] телах*.

О чём писал ДЕМОКРИТ в трактате *Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν*, мы, к сожалению, ничего не знаем, и можем только строить предположения. Скорее всего, ДЕМОКРИТ учил, что никаких иррациональных линий нет, поскольку процесс бесконечного спуска, о котором говорят пифагорейцы, в действительности должен остановиться «у последнего предела». Тем самым для всяких двух линий их общей мерой окажется последнее неделимое, из которых все линии состоят, — а мы считаем эти линии несоизмеримыми по недоразумению, в силу того, что наше обыденное восприятие подсказывает нам, что деление всегда можно будет продолжить и дальше.

Такое представление об устройстве математических объектов должно было приводить ДЕМОКРИТА к весьма своеобразным выводам. А. О. МАКОВЕЛЬСКИЙ (1946, с. 87) описывает одну из реконструкций этого учения, согласно которой квадрат с равными

Надо думать, что если египтяне умели вычислять объём усечённой пирамиды, то и с обычной пирамидой они тоже умели справляться.

сторонами существует лишь в мнении людей, в действительности же всякий квадрат является прямоугольником, у которого основание отличается от высоты на такую малую величину, которая не воспринимается нашим зрением и осязанием. Действительно, не существует таких пифагоровых троек $a^2 + b^2 = c^2$, в которых одно катетное число равно другому, и поэтому в «обычном» равно-равном квадрате диагональ не может быть соизмеримой со стороной. Но такие пифагоровы тройки, в которых одно катетное число отличается от другого на единицу, существуют (это тройки {3, 4, 5}, {20, 21, 29}, {119, 120, 169} и т. д.), и потому могут существовать соответствующие «квадраты», в которых диагональ будет соизмерима со стороной. (Впрочем, эта конструкция сама по себе выглядит подозрительно: ведь непонятно, что мешает существовать квадрату с равными сторонами, пока в него ещё не вписана никакая диагональ.)

Ещё одна трактовка названия трактата *Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν*, которую я могу предложить, основывается на фрагменте диалога Платона *Теэтет* (201ac), в котором Сократ, не называя Демокрита по имени, но употребляя иносказания «я слышал от каких-то людей», «тот, кто это говорил» и т. п., излагает его учение:

> На самом деле ни один из элементов невозможно объяснить, поскольку им дано только называться, иметь какое-то имя. А вот состоящие из них вещи и сами словно сплетаются, и имена их, также сплетаясь, образуют объяснение, сущность которого заключается именно в сплетении имен. Таким образом, эти элементы необъяснимы (*ἄλογα*) и непознаваемы, они лишь ощутимы. Сложное же познаваемо, выразимо (*ῥητάς*) и доступно истинному мнению. Поэтому, если кто составляет себе истинное мнение о чем-то без объяснения, его душа владеет истиной об этом, но не познаёт; ведь кто не может дать или получить объяснение чего-то, тот этого не знает. Получивший же объяснение может все это познать и в итоге иметь это знание.

Употребляемые здесь по отношению к элементам слова *ἄλογα* и *ῥητάς* используются в X книге *Начал* Евклида в качестве терминов для обозначения иррационального и рационального отношений. Кажется, что в контексте рассказа Сократа они полностью лишены этой терминологической окраски. (Хотя может быть и не лишены — ведь диалог *Теэтет* начинается именно с обсуждения проблемы классификации соизмеримых и несоизмеримых линий в геометрии.) С другой стороны, именно слово *ἀλόγων* Демокрит поставил в название своего трактата. Учитывая данное свидетельство Платона, название трактата Демокрита можно перевести и как *О не имеющих словесного объяснения линиях и [неделимых] телах*, и тем самым может оказаться, что этот трактат не имел никакого непосредственного отношения к проблеме соизмеримости, но в нём говорилось о том, что некоторые линии и неделимые тела являются первоэлементами, и потому им не может быть дано никакого словесного объяснения.

Второй интересующий нас трактат Демокрита носит двойное название *Περὶ διαφορῆς γνώμης ἢ Περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης*. Как это следует из второй половины названия, *О касании круга и сферы*,[12] он имеет самое прямое отношение к нашей теме. Очень интересна первая половина названия: *Περὶ διαφορῆς γνώμης*, *О различии познания*. Это название отсылает нас к учению Демокрита о законнорождённом и незаконнорождённом познании, а также ко спору Парменида с математиками.

Что мог написать Демокрит, будучи атомистом, по вопросу касания круга и прямой? Во всяком случае не то, что круг касается прямой в одной точке — ведь в его теории никаких точек нет, а существуют лишь «атомы и пустота». Как сообщает Аристотель в трактате *О небе* (307a2, a17), по Демокриту шар является «всюду углом» (*ὅλον ἐστὶ γωνία*). Иначе говоря, шар — это многогранник с очень большим числом мельчайших неделимых граней, и в любом его месте мы натыкаемся на вершину угла, правда — весьма тупого. То же самое и для круга: его надо мыслить как многоугольник с очень большим числом неделимых «сторон». Тем самым касание прямой и круга — это касание одного атома круга с одним либо двумя атомами прямой, или касание двух атомов круга с двумя или тремя атомами прямой, — как нам это больше нравится (рис. 3).

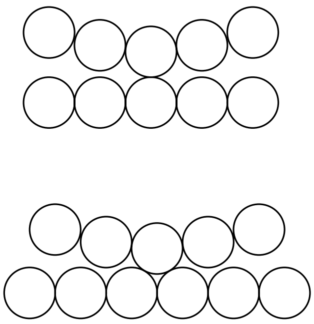

Рис. 3

Впрочем, при «многоугольной» укладке атомов по окружности оказывается непонятно, как они лежат внутри круга. Имеется один не очень внятный фрагмент в комментарии Фемистия к трактату Аристотеля *О небе*, сохранившийся только в еврейском переводе арабского перевода (см. Лурье 1970, фр. 123), из которого можно понять, что Демокрит мысленно выделял в неделимом атоме семь частей, соответствующих центру и трём парам взаимно ортогональных направлений, по которым и происходит соединение атомов в своего рода «кубическую решётку». Если этот так, то круг по Демокриту представлял собой нечто вроде изображения на экране монитора, составленного из пикселей, располагающихся в вершинах квадратной решётки (рис. 4).

[12] Для касания Демокрит употребляет глагол *ψαύεσθαι* (буквально — «ощупывать», «осязать»), Евклид — глагол *ἐφάπτεσθαι* («достигать», «присоединять»).

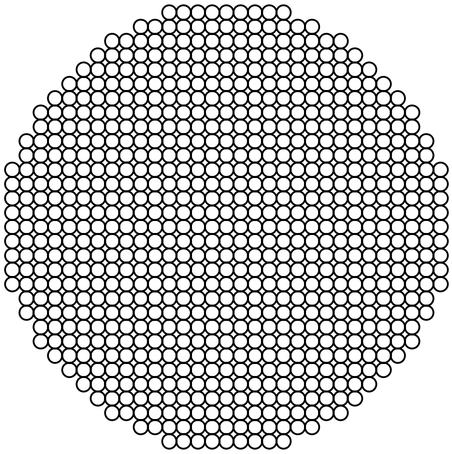

Рис. 4

Правда, углы у такого «круга» не распределены равномерно по периферии, — но зато его площадь можно измерять числом атомов, из которых он состоит.[13]

§ 7. Вопрос о «различии познаний»

Обратимся теперь к «различию познаний», о котором говорит Демокрит в названии своей книги о касании, и попробуем понять, как это различие соотносится с возражением Протагора геометрам, учившим о касании в точке. Демокрит учить о касании в точке не мог, в его геометрии вообще нет никаких точек, — а вот пифагорейцы могли (согласно пифагорейцам, «точка — это единица, имеющая положение»), и Анаксагор, по-видимому, тоже мог, если он вообще занимался этим вопросом. Отсюда следует заключить, что Протагор возражал скорее всего пифагорейцам, а быть может, и Анаксагору. Рассмотренное в § 4 гипотетическое первоначальное доказательство того, что круг и прямая касаются в точке, является по своему стилю подчёркнуто пифагорейским, поскольку оно опирается на принципиальную несовместимость прямого и кривого как двух полярных пифагорейских противоположностей.

Два познания у Демокрита, законное и незаконное, — это познание с помощью чувств и познание с помощью разума. Чувственное познание говорит нам, что прямая соприкасается с кругом на некотором протяжении, и следовательно, так оно и есть на самом деле — это позиция Протагора. Демокрит противопоставил чувственному познанию познание разумом, и это противопоставление привело его к выводу о существовании атомов. Согласно атомистической теории, прямая касается круга не в точке (ибо никаких точек, о которых говорят пифагорейцы, не существует), но в одном или нескольких атомах.

[13] Так у «круга», изображённого на рис. 4, диаметр равен 31 атому, а состоит он из 757 атомов. Это даёт неплохое приближение для числа $\pi = 4S/d^2 = 3028 : 961 \approx 3{,}151...$ Обсуждение в этой связи так называемых «круглых чисел» см. Янков 2001.

В отношении к вопросу о касании позиции Демокрита и Протагора странным образом смыкаются, несмотря на принципиальное различие их учений в целом. Протагор отрицает касание прямой и окружности в точке, исходя из непосредственной видимости и здравого смысла. Демокрит тоже отрицает такое касание, но уже исходя из некоторой «умной видимости», предметом которой является «незримо малое».

Вернёмся к позиции Анаксагора и пифагорейцев, утверждавших бесконечную делимость сущего. Эта позиция оказалась более приемлемой для разворачивания математики, не зависящей от философских предпосылок и свободной от противоречий. В кругу математиков пифагорейской школы атомистическая концепция Демокрита и сенсуалистские возражения Протагора вряд ли воспринимались достаточно серьёзно. Бесконечная делимость пространства считалась доказанной, а тем самым доказательства несоизмеримости диагонали и стороны принимались как вполне «законнорождённые».

Следующий шаг в этом направлении сделал Феодор из Кирены, доказавший с помощью метода чётных и нечётных несоизмеримость сторон квадратов, стороны которых разнятся между собой в 3, 5, и т. д. раз — вплоть до числа 17, для которого метод Феодора не работает. Об этом доказательстве сообщает Платон в диалоге *Теэтет*, посвящённом выяснению того, что такое знание. Значительная часть этого диалога посвящена критике тезиса Протагора «знание есть ощущение» и еще одного тезиса «знание есть правильное мнение с объяснением», возможно, принадлежащего Демокриту. Интересно, что Феодор, будучи другом Протагора, в дискуссии не участвует, предоставив Сократу возможность вести беседу с Теэтетом, который учится у Феодора математике. О себе же Феодор говорит как о том, кто «отошёл от отвлечённых рассуждений (*ἐκ τῶν ψιλῶν λόγων*) и склонился к геометрии» (165a).

§ 8. Переход к «геометрической» теории касания

Для создания свободной от натурфилософских предпосылок математики следовало оторвать от философских рассуждений о сущем не только математические предметы, но также и сами доказательства. С этой точки зрения исходное пифагорейское доказательство теоремы о касании, которое мы рассмотрели в § 4, содержало в себе логический круг: нам требуется доказать, что эта прямая не совпадает с этим кругом, а мы постулировали такое несовпадение изначально, для «прямого и круглого вообще»!

Кем и когда было построено то доказательство, которое приводится в предложении III.16 *Начал* Евклида, неизвестно. Самые ранние кандидатуры здесь — это уже упоминавшиеся выше Феодор из Кирены и Гиппократ из Хиоса, работавшие в конце V в.; но возможно, что это доказательство было построено во времена Платона или даже Аристотеля, в рамках программы выстраивания единой геометрической эпистемы.

Я уже говорил в § 4, что все ранние версии доказательства должны были начинаться с допущения «пусть прямая касается круга своей протяжённой частью». Рассмотрим одну такую версию, несколько необычную на современный взгляд, но вполне возможную для греческой математики IV в., как это будет показано несколько ниже. Проведём радиусы *OA* и *OB* и получим равнобедренный треугольник *OAB* (рис. 5). Но радиусы *OA* и *OB* перпендикулярны обводу круга. Следовательно, они перпендикулярны к прямой *AB*, поскольку эта прямая совпадает с обводом. Получился прямоугольник с двумя прямыми углами. Но таких прямоугольников не бывает: ведь две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются при их продолжении. В силу возникшего противоречия сделанное предположение неверно. Следовательно, прямая не может касаться круга своей протяжённой частью. Поэтому область касания прямой и круга не имеет протяжения, то есть является точкой.

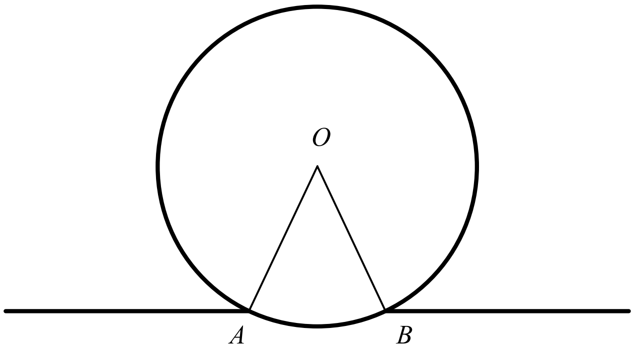

Рис. 5

Дальнейший логический анализ этого доказательства идёт по трём направлениям.

Во-первых, требуется обосновать утверждение о параллельности перпендикуляров. Евклид доказывает более общее предложение о параллельности двух прямых, образующих с третьей равные накрестлежащие углы, в предложении I.27, опираясь на предложение I.16 о том, что во всяком треугольнике внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного. Возможно, что раньше для доказательства того, что перпендикуляры при их продолжении не пересекаются, имелось какое-то специальное рассуждение; во всяком случае, когда Аристотель во *Второй Аналитике* (74a13–17) объясняет, что доказывать нужно общее, а не частное, он среди прочих приводит следующий пример:

> Если бы кто-либо захотел доказать, что перпендикуляры (*ὀρθαί*) не встречаются (*οὐ συμπίπτουσι*), он мог бы подумать, что доказательство этого возможно потому, что это свойство имеют все перпендикуляры. Но это не так, ведь не только такие равные (*ἴσαι*) [углы] производят это, но и другие равные тоже. [14]

Отсюда можно сделать вывод, что сначала существовало отдельное доказательство для перпендикуляров, а во времена Аристотеля, оно было заменено на более общее.

[14] Восстановленный перпендикуляр Евклид называет «*πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμή*» (I.11), а опущенный перпендикуляр — «*κάθετος εὐθεῖα γραμμή*» (I.12). Точно так же и в этом отрывке из Аристотеля *ὀρθαί* — это и «прямые, проведённые под прямыми углами», и сами «прямые углы». Поэтому можно называть их равными, не прибавляя слова «углы».

Во-вторых, нам следует объяснить «странное» с современной точки зрения образование угла непосредственно между радиусом и обводом круга, а не между радиусом и касательной к этому кругу. О том, что в геометрии IV в. такие углы действительно могли рассматриваться в доказательстве, свидетельствует отрывок из *Первой Аналитики* АРИСТОТЕЛЯ (41b14–22), в котором рассматривается весьма своеобразное доказательство теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Проведём окружность с центром в вершине треугольника, проходящую через концы основания, и продолжим боковые стороны треугольника за его вершину до пересечения с этой окружностью (рис. 6). Теперь принимаются равными (а) углы между радиусами и обводом круга, поскольку это углы в полукруге, (б) противолежащие углы в сегменте; но если от равных отнять равные, то и остатки будут равны, поэтому углы при основании равнобедренного треугольника равны.

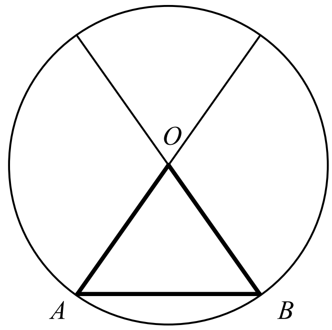

Рис. 6

В третьих, выше мы утверждали, что радиусы перпендикулярны обводу круга, — но вправе ли мы это делать? Ведь угол между радиусом и обводом не является прямолинейным! Не вернее ли будет сказать, что этот угол больше любого острого угла, но всётаки меньше прямого угла? Это последнее утверждение представляет собой последнюю часть теоремы III.16 о касании; здесь мы наконец-то выходим из области гипотез и оказывается в области засвидетельствованных фактов. Однако входим мы в неё, обогащённые существенно более глубоким пониманием той истины, которая, как говорил ДЕМОКРИТ, скрыта от непосредственного человеческого взора.

Библиография

АРИСТОТЕЛЬ. *Сочинения*. В 4 т. М., Мысль, 1976–81.

АРХИМЕД. *Сочинения*. Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М., Физматгиз, 1962.

БЕЛОЗЁРОВ С. Е. *Пять знаменитых задач древности. История и современная теория*. Ростов на Дону, 1975.

ВИЛЕНКИН Н. Я. О вычислении объёма усечённой пирамиды в Древнем Египте. *Историко-математические исследования*, **28**, 1985.

ВЫГОДСКИЙ М. Я. *Арифметика и алгебра в Древнем мире.* М., Наука, 1967.

ЗУБОВ В. П. К вопросу о математическом атомизме Демокрита. *Вестник древней истории*, 1951, №4, с. 204–208.

ЗУБОВ В. П. У истоков механики. В кн.: ГРИГОРЬЯН А. Т., ЗУБОВ В. П. *Очерки развития основных физических понятий*. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 3–173.

ЗУБОВ В. П. *Развитие атомистических представлений до начала XIX века*. М.: Наука, 1965.

ЛАКАТОС И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы*. Пер. И. Н. Веселовского. М.: Наука, 1967.

ЛУРЬЕ С. Я. К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию. *Архив истории науки и техники*, сер. 1, вып. 1. 1933, с. 45–70.

ЛУРЬЕ С. Я. *Теория бесконечно-малых у древних атомистов*. М.–Л., Изд. АН СССР, 1935.

ЛУРЬЕ С. Я. *Демокрит: Тексты, перевод, исследования*. Л., Наука, 1970.

МАКОВЕЛЬСКИЙ А. О. *Древнегреческие атомисты*. Баку: АН АзССР, 1946.

НЕЙГЕБАУЕР О. *Лекции по истории античных математических наук. Т. 1. Догреческая математика*. М.–Л., ОНТИ, 1937.

ПЛАТОН. *Собрание сочинений*. В 4 т. М., Мысль, 1990–94.

ПРАСОЛОВ В. В. *Геометрические задачи древнего мира*. М., Фазис, 1997.

РАИК А. Е. Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов. *Историко-математические исследования*, **11**, 1958, с. 171–184.

РОЖАНСКИЙ И. Д. *Анаксагор: У истоков античной науки*. М., Наука, 1972.

РОЖАНСКИЙ И. Д. *Развитие естествознания в эпоху античности: Ранняя греческая наука «о природе»*. М., Наука, 1979.

СЕКСТ ЭМПИРИК. *Сочинения*. В 2 т. М., Мысль, 1976.

ЩЕТНИКОВ А. И. *Мысленный эксперимент и рациональная наука*. М.: Аспект-пресс, 1994.

ЯНКОВ В. А. Становление доказательства в ранней греческой математике (гипотетическая реконструкция). *Историко-математические исследования*, **2(37)**, 1997, с. 200–236.

ЯНКОВ В. А. Геометрия Анаксагора. *Историко-математические исследования*, **8(43)**, 2003, с. 241–267.

BORTOLOTTI E. La scienza algebraica degli egiziani e dei babilonesi. *Memorie delle R. Accademia della szienze dell'Instituto di Bologna*, ser. IX, **2**, 1934–1935, p. 184–232, 390–452.

LLOYD G. E. R. *Polarity and analogy: Two types of argumentation in early Greek thought*. Cambridge, 1966.