Рассуждение в элементарной математике [1]

Джонатан П. Селдин

Многим начинающим изучать алгебру может показаться, что она сводится к формальным манипуляциям. Но это не так. Как Мидлмис указывает в предисловии к своей книге (1953), утверждение о том, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень $x = a$, эквивалентно доказательству того, что

$$\textit{если } f(x) = g(x), \textit{ то } x = a.$$

Более того, проверка $f(a) = g(a)$ эквивалентна доказательству обратной теоремы.

Начинающим это можно показать и без символов:

ЗАДАЧА. *Если число умножить на три и прибавить пять, получится двадцать; найдите число*.

РЕШЕНИЕ. Предположим, что существует такое число, что если его умножить на три и затем прибавить пять, то получится двадцать. Вычитая по пяти с каждой стороны, получим, что утроенное искомое число равно пятнадцати. Тем самым искомое число равно пяти.

ПРОВЕРКА: *Если пять умножить на три и прибавить пять, получится двадцать*.

Решение алгебраических задач таким способом может помочь учащимся, имеющим трудности с алгебраической символикой; эту проблему обсуждает Гершкович (1989).

Всё это показывает, что алгебра отнюдь не сводится к манипулированию символами. В действительности она отличается от арифметики в двух существенных моментах:

I. В алгебре мы пользуемся *рассуждениями* для того, чтобы решить задачу косвенным путём, если не можем решить её прямо.

II. Здесь мы имеем дело с *общими* свойствами чисел наравне с частными (и доказываем эти свойства посредством рассуждений).

Однако математическое рассуждение зачастую совсем не схоже с рассуждениями в других областях. Оно скорее похоже на те рассуждения, которыми пользовались софисты, как пишет об этом Де Лонг (1970):

> ...Мы знаем, что имелись учителя, называвшие себя софистами. Подобно странствующим трубадурам, они путешествовали из города в город, за определённую плату обучая своих учеников убедительно говорить на различные темы. Софисты учили и тому, как отражать доводы любого оппонента в публичном споре. Сами споры нередко бывали очень острыми, а доводы — весьма театральными, так что мы можем

---

[1] Перевод выполнен А. И. Щетниковым по изданию: Jonathan P. Seldin. Reasoning in the Elementary Mathematics. *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics*. Université Laval, 1989.

> понять, почему прибытие в город известного софиста заставляло публику волноваться, и почему софисты зачастую просили за свои услуги немалую плату.
>
> Протагор, которого часто называют самым выдающимся софистом, несомненно считался бы и крупным мыслителем, если бы его работы сохранились. Более всего он известен своим изречением «человек есть мера всех вещей» и своим гуманизмом, представляющимся нам непривычно современным. Следующая античная история о нём, пусть она и является апокрифом, демонстрирует нам словесную пиротехнику, на которую софисты были большими мастерами.
>
> Протагор подрядился учить Еватла риторике с тем, чтобы тот мог выступать в суде. Еватл заплатил авансом половину условленной платы, и они договорились, что вторая полвоина будет выплачена, когда Еватл выиграет своё первое дело в суде. Однако Еватл не спешил начать свою судебную практику. Протагор, равно озабоченный и своей репутацией и получением денег, решил возбудить против него дело. В суде Протагор заявил следующее: «Еватл утверждает, что он не должен платить мне, но это абсурдно. Предположим, что он выиграет это дело. Поскольку это его первое дело в суде, он должен будет заплатить мне по нашему договору. Предположим теперь, что он проиграет дело. Тогда он должен будет заплатить мне по решению суда. Тем самым ему придётся платить в любом случае, проиграет он или выиграет». Еватл, как способный ученик, противопоставил доводам Протагора аналогичные собственные: «Протагор утверждает, что я должен заплатить ему, но это абсурдно. Предположим, что он выиграет это дело. Поскольку я не выиграл своё первое дело в суде, я не должен буду платить ему по нашему договору. Предположим теперь, что он проиграет дело. Тогда я не должен буду платить ему по решению суда. Тем самым я не должен буду платить в любом случае, проиграет он или выиграет» (стр. 9–10).

Вообразите подобный случай в современной классной комнате!

С другой стороны, в математике мы пользуемся доводами такого рода постоянно. И даже если рассказанной истории и не случилось на самом деле, она всё равно служит хорошей иллюстрацией, показывающей различия между рассуждением в математике и рассуждениями в других областях.

Другое различие состоит в том, что математика интересуется доказательствами в том числе и интуитивно очевидных результатов. Этот интерес также восходит к древним грекам, как это отмечает Эрик Стениус (1978):

> Если «приводить доказательство» означает «доказывать неочевидное исходя из очевидного», то тогда греческие математики не были первыми, кто стал доказывать теоремы; но весьма правдоподобным выглядит утверждение, что греки были первыми, кто стал искать доказательств для очевидных фактов. Поэтому я утверждаю: действительно оригинальная и революционная идея греческих геометров заключалась в их стремлении отыскивать доказательства очевидных фактов.
>
> Разницу между доказательством неочевидного посредством очевидного и доказательством очевидного можно показать на примере теоремы о сумме углов треугольника. Пифагорейцы пользовались известным чертежом (рис. 1), который можно найти и во многих современных учебниках. Если мы проведём прямую DCE, параллельную AB (здесь слово «параллельная» употреблено скорее в эпистемологическом

смысле «проходящая рядом с другой прямой», нежели в евклидовом смысле «не пересекающая другой прямой»), то теорема станет очевидна, если только посмотреть на чертёж правильным образом. Ведь очевидно, что равны накрестлежащие углы в паре *DCA* и *CAB*, равно как и накрестлежащие углы в паре *ECB* и *CBA*. Если заметить, что с одной стороны *DCE* равен трём углам *DCA*, *ACB*, *BCE*, с другой же стороны — двум прямым углам, то теорема там самым станет очевидной.

Но если мы попробуем доказать, что упомянутые накрестлежащие углы являются равными, то эта попытка доказывать очевидное столкнётся с разного рода трудностями, которые, как это известно математикам, привели 2000 лет спустя к низвержению евклидовой геометрии как системы «математических истин» (стр. 258–259).

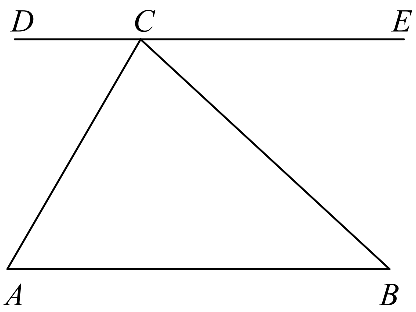

Рис. 1

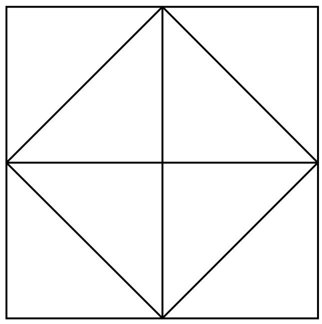

Рис. 2

Другой пример такого рода доказательства (неочевидного на основе очевидного, когда требуется посмотреть на чертёж правильным образом), имеется в диалоге Платона *Менон*, где Сократ пользуется следующим чертежом (рис. 2), чтобы показать, что квадрат на диагонали квадрата вдвое больше исходного квадрата по площади.

Ещё один пример даёт нам следующее доказательство теоремы Пифагора (рис. 3). Это доказательство называют иногда «доказательством с помощью перекладывания».

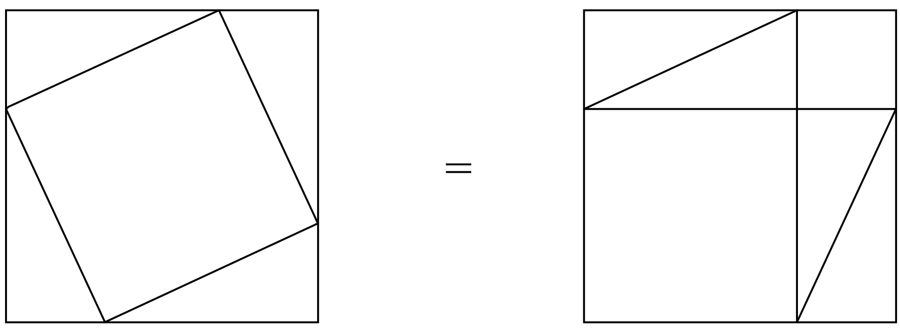

Рис. 3

Согласно Торетти (1978), вскоре после Фалеса (ок. 639–546 до н. э.) греки начали развивать новый способ доказательства, в котором понимание основывалось не на рассмотрении чертежа, но на работе со значениями употребляемых терминов. Это были первые дедуктивные доказательства в математике. В целом это утверждение согласуется со старейшим фрагментом дедуктивной математики, представленным в 21–34 предложениях IX книги *Начал* ЕВКЛИДА, основывающихся на определениях VII книги (особенно на 6 и 7). Для каждого из этих доказательств приводится чертёж, но он не служит основой для понимания. Чтобы понять доказательство, нужно понимать смысл употребляемых слов и следить за этим смыслом. Как отмечает ТОРЕТТИ,

> Если бы греческие математики не приняли этот метод точного, сильного и неинтуитивного мышления, они никогда не смогли бы установить существование несоизмеримых величин, каковыми являются, к примеру, два отрезка, не являющиеся кратными никакому другому отрезку, каким бы малым он ни был.

Далее ТОРЕТТИ цитирует Б. Л. ВАН-ДЕР-ВАРДЕНА:

> Имея дело с эмпирически рассматриваемыми и измеряемыми отрезками, никому не придёт в голову спрашивать, имеют ли они общую меру; толщина волоса уложится целое число раз в любой линии, которую мы только сумеем провести. Вопрос о соизмеримости является осмысленным только для таких отрезков, которые являются объектами мысли.

(Именно эту точку зрения на математику и следует донести до учащихся.)

Греки уже знали, что существуют несоизмеримые величины. Их открытие обычно приписывается ПИФАГОРУ либо его ученикам. ХИЗС (1981) пишет об этом так:

> Метод, с помощью которого пифагорейцы доказали, что $\sqrt{2}$ несоизмерим с единицей, несомненно совпадает с методом, описанным АРИСТОТЕЛЕМ [Первая аналитика 41a26–27], когда посредством доказательства от противного показывается, что если бы диагональ квадрата была соизмерима с его стороной, то тогда одно и то же число было бы и чётным, и нечётным. Это несомненно то же самое доказательство, что и интерполированное в текст ЕВКЛИДА доказательство X.117.
>
> Предположим что диагональ квадрата AC соизмерима с его стороной AB; пусть их отношение выражено наименьшей парой чисел $\alpha : \beta$. Тогда $\alpha > \beta$, и по необходимости $\alpha > 1$. Тогда $AC^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2$; и поскольку $AC^2 = 2AB^2$, то и $\alpha^2 = 2\beta^2$. Тогда α^2, и тем самым α, будет чётным. Раз отношение $\alpha : \beta$ выражено наименьшей парой чисел, тем самым β будет *нечётным*. Положим $\alpha = 2\gamma$. Тогда $4\gamma^2 = 2\beta^2$, и тем самым $2\gamma^2 = \beta^2$. Поэтому β^2, и тем самым β, будет *чётным*. Но β является также нечётным: а это невозможно. Тем самым диагональ AC не может быть соизмеримой со стороной AB.

Отметим, что хотя это доказательство и может сопровождаться чертежом, на котором изображены квадрат и его диагональ, чертёж ничего не даёт нам для его понимания. От предложений IX книги *Начал* ЕВКЛИДА оно принципиально отличается тем, что является *косвенным*. Как объяснить преобразование греческой математики из визуальной и интуитивной науки в абстрактную, основывающуюся на понимании значений терминов и смысла рассуждений, в которых эти термины используются? Наше объяснение должно по возможности касаться того, почему это преобразование совершили именно греки, а не кто-нибудь ещё. И было бы хорошо, чтобы оно давало нам такой материал, с помощью которого мы могли бы объяснить своим ученикам, чем занимается математика.

Можно начать с того, что греки любили спорить, как об этом рассказывает Де Лонг в истории о Протагоре и Еватле. Кроме того, в отличие от других ранних античных обществ они не имели всемогущего класса жрецов. Поэтому у них не было таких вопросов, на обсуждение которых было бы наложено табу.

Однако эта любовь к спору ради спора ещё недостаточна для того, чтобы объяснить изменения, произведённые греками в математике. Ведь это изменение касается не только путей установления истины. Оно относится также и к переходу от практической деятельности к чистому умозрению. Математика, известная нам по египетским и вавилонским источникам, всегда была связана с такими видами практической деятельности, как землемерие и архитектура. И только греки стали заниматься ей теоретически, не имея в виду непосредственной практической выгоды, о чём говорит следующая история, которую приводит Хизс (1981):

> Один ученик, который только что начал учиться геометрии у Евклида, спросил, едва только разобрав первое предложение: «А какую пользу я получу от изучения этого?» Евклид подозвал раба и сказал: «Дай ему обол, ибо он хочет извлекать выгоду из того, что изучает».

Поскольку почти все фрагменты доевклидовой греческой математики сегодня утрачены, мы не можем быть полностью уверены в том, какая именно причина привела к подобному изменению. Однако имеется есть ряд предположений на этот счёт.

Одно из таких предположений высказал Арпад Сабо. В своей работе (1978) он утверждает, что это изменение произошло под действием внешних для математики факторов, в частности, под влиянием философской школы элеатов. Это была школа Парменида (начало 5 века до н. э.) и его ученика Зенона (ок. 490 – ок. 430 до н. э.). Последний известен своим парадоксами движения. Сабо обрисовывает философию элеатов так:

> Их философию отличает отказ от практического опытного знания и от опоры на чувственное восприятие. Парменид провозгласил, что истина не может быть постигнута с помощью чувственного восприятия, которое ошибочно, но единственно лишь с помощью разума. Чтобы прояснить, что он понимал под «разумом», я приведу здесь один из его аргументов, в котором говорится о том, что сущее на могло возникнуть, но было всегда:
>
> «Предположим, что оно возникло; тогда оно могло возникнуть либо из того, что было, либо из того, чего не было; третьей возможности здесь нет. Если оно возникло из того, что было, то оно существовало уже до того, как возникло; поэтому бессмысленно утверждать, что оно возникло таким образом. Если же предположить, что оно возникло из того, чего не было, то это немедленно приведёт к противоречию. То, что есть, никогда не могло быть тем, чего не было; поэтому оно не могло возникнуть и этим путём.»
>
> Косвенные доводы несомненно играли в философии элеатов важную роль. Без них нельзя было бы обосновать учение о том, что не существует *движения*, *возникновения*, *исчезновения*, *пространства* и *времени*. Это учение противоречит свиде-

> тельствам наших чувств; однако элеаты, поддерживаемые своей верой в то, что разум является единственным проводником к истине, приняли его. Более того, вся диалектика элеатов представляет собой метод косвенного доказательства, поэтому АРИСТОТЕЛЬ и объявил ЗЕНОНА изобретателем диалектики. <...> Однако нет никакой существенной разницы между диалектикой ЗЕНОНА и доводами ПАРМЕНИДА. Их самая достопримечательная общая черта состоит в применении косвенного доказательства. Итак, я считаю, что влияние философии элеатов привело как к устранению эмпиризма и зрительной очевидности из греческой математики, так и к внедрению в неё косвенных доказательств.

Концепция САБО сводится к тому, что математика стала теоретической дисциплиной в результате попыток сделать её предмет приемлемым для философов Элейской школы. Это было весьма затруднительно, поскольку эти философы отвергали множественность (без которой заведомо нельзя обойтись в арифметике) и пространство (необходимое в геометрии). Согласно САБО, приемлемость арифметики была достигнута за счёт определения единицы по сути дела таким же образом, как ПАРМЕНИД определял сущее; прочие же числа были представлены как особая разновидность множественности, не встречающаяся в чувственно воспринимаемом мире. Вслед за этим были предприняты попытки чисто теоретического, дедуктивного построения геометрии; однако сделать её полностью приемлемой для элеатов не удалось. Именно поэтому, считает САБО, геометрия в результате оказалась отдельной наукой.

К сожалению, как пишет об этом ТОРЕТТИ (1978), доводы САБО не являются «полностью приемлемыми». К примеру, САБО настаивает на том, что теория несоизмеримости (т. е. иррациональных величин), изложенная в X книге *Начал* ЕВКЛИДА, была завершена ещё до эпохи ПЛАТОНА, поскольку ПЛАТОН в своих диалогах употребляет её технические термины таким образом, который свидетельствует о том, что его аудитория была с ними хорошо знакома. Однако ПЛАТОН дожил до своего 80-летия в 347 г. до н. э.; и его жизнь был достаточно долгой, чтобы эти технические термины приобрели широкую известность за её время, и даже за часть этого времени. Г. Б. КАРРИ, студентом которого я был, отметил своё 62-летие в тот год, когда П. Дж. КОЭН ввёл термин «форсинг» в доказательстве независимости континуум-гипотезы, поэтому за оставшиеся годы своей жизни (а он дожил до 81 года) он мог употреблять этот термин перед аудиторией математиков, занимающихся математической логикой и теорией множеств, предполагая, что эта аудитория полностью понимает его смысл.

Альтернативная концепция, представляющаяся существенно более приемлемой, была предложена КНОРРОМ (1975). (Эта концепция в действительности была предложена позднее теории САБО, поскольку книга последнего (1978) является переводом книги, опубликованной на немецком языке в 1969 году.) Согласно этой концепции, превращение в теоретическую дисциплину произошло в рамках изучения несоизмеримости. КНОРР сформулировал этот тезис, представив реконструкцию развития этой теории.

КНОРР начинает с рассмотрения арифметики поздних пифагорейцев в V веке до н. э. Он утверждает, что использовавшиеся здесь «чертежи» представляли собой фигуры, выложенные рядами камешков, так что теоремы о чётных и нечётных числах из 21–34 предложений IX книги *Начал* Евклида могли основываться на рассмотрении этих фигур. К примеру, рассмотрим фигуры для предложений 21 (рис. 4) и 22 (рис. 5) и сравним их с текстом:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21.

Если складывается сколько угодно чётных чисел, то целое будет чётным.

Пусть сколько угодно чётных чисел, *AB, BC, CD, DE,* складываются вместе; я утверждаю, что целое *AE* будет чётным. Действительно, поскольку каждое из чисел *AB, BC, CD, DE* является чётным, оно имеет половину; [VII. Опр. 6] поэтому и целое *AE* также имеет половину. Но чётное число делится на две равные половины; [id.] поэтому *AE* является чётным. Что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.

Если складывается сколько угодно нечётных чисел, и их количество является чётным, то целое будёт чётным.

Пусть сколько угодно нечётных чисел, *AB, BC, CD, CE,* в чётном количестве, складываются вместе; я утверждаю, что целое *AE* будет чётным. Действительно, поскольку каждое из чисел *AB, BC, CD, DE* является нечётным, если от каждого из них отнять единицу, остатки будут чётными; [VII. Опр. 7] поэтому их сумма будет чётной. [IX. 21] Но количество единиц также является чётным. Поэтому целое *AE* является чётным. [IX. 21] Что и требовалось доказать.

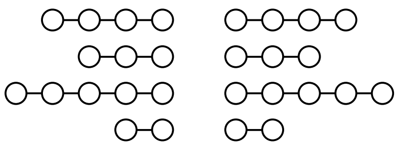

Рис. 4

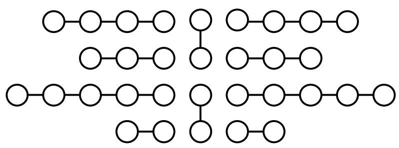

Рис. 5

Насколько больше дают для понимания этих доказательства фигуры Кнорра по сравнению с чертежами, приводимым в изданиях Евклида!

Заметьте, что важной составляющей понимания этих доказательств при правильном рассматривании фигур является понимание того, что выводы будут истинными не только для данной конкретной фигуры, но для любой фигуры, удовлетворяющей условиям предложений.

Для изучения свойств квадратных чисел камешки укладываются в квадраты. Таким образом можно доказать, что квадрат чётного числа является чётным, и даже делится на четыре (рис. 6). И опять мы можем пользоваться одним чертежом для квадрата любого чётного числа.

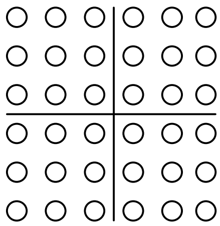

Рис. 6

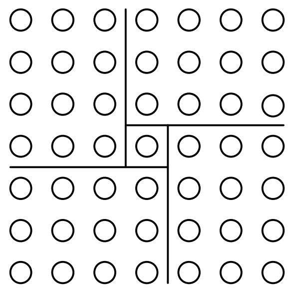

Рис. 7

Аналогичный чертёж (рис. 7) используется для того, чтобы доказать, что квадрат любого нечётного числа является чётным, а остаток за вычетом единицы делится на четыре части. Заметим, что четыре прямоугольника на схеме всегда будут такими, что одна их сторона будет на единицу больше другой; тем самым эти прямоугольники всегда являются чётными, поэтому мы приходим к более сильному заключению о том, что *квадрат нечётного числа за вычетом единицы делится на восемь*.

Эти результаты получаются и алгебраически: $(2n)^2 = 4n^2$ и $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$. Поскольку либо n, либо $n + 1$ будет чётным, чётным будет и их произведение.

Если мы применим эти результаты к проблеме отыскания троек чисел, которые служили бы катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника в свете теоремы Пифагора, мы незамедлительно придём к следующим результатам:

1. Если гипотенуза чётная, то чётными будут и оба катета.

2. Если гипотенуза нечётная, то один катет будет чётным, а другой нечётным.

Ключ к этим результатам состоит в том, что сумма двух нечётных квадратов не может делиться на четыре. Алгебраически: $(8n + 1) + (8m + 1) = 4(2n + 2m) + 2$.

Knopp предположил, что несоизмеримость стороны и диагонали квадрата была открыта тогда, когда эти результаты были приложены к практической проблеме определения отношения диагонали квадрата к его стороне, или, что то же самое, отношения гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника к его катету. Эта попытка приводит в неожиданный тупик. Ведь если гипотенуза будет чётной, то тогда чётными будут и оба катета, и поэтому мы сможем разделить их пополам и получить новые равнобедренные прямоугольные треугольники в половину от исходного. Повторяя эту процедуру раз за разом, мы опять и опять будем получать равнобедренные прямоугольные треугольники с чётной гипотенузой. Такой процесс будет бесконечным, а в области чисел это невозможно. Если же гипотенуза будет нечётной, то тогда один катет будет чётным, а другой нечётным. Но поскольку треугольник является равнобедренным, нам придётся заключить, что чётное число равно нечётному, что абсурдно. Выход из тупика состоит единственно в том, чтобы признать наше рассуждение за косвенное доказательство того, что диагональ и сторона квадрата не имеют общей меры.

Заметим, что это косвенное доказательство уже не может быть понято посредством рассматривания чертежа. Согласно Knoppу, именно в этой ситуации в греческой математике появились косвенные доказательства и такие доказательства, в которых понимание смысла доказательства требует точного понимания значений всех используемых терминов. (По КНОРРУ, это произошло около 430 г. до н. э. Это слишком поздно для того, чтобы внедрение косвенных доказательств шло прямо от элеатов, однако оно могло быть связано с элеатами опосредованно через других философов.)

Соблазнительно думать, что это открытие вызвало сильный кризис в математике и философии, поскольку пифагорейцы считали, что всё во Вселенной может быть выражено с помощью целых чисел. Более того, в самой математике отношение было определено для чисел, так что общая теория подобия осталась без основания. Но этого не произошло. Математики и философы продолжали заниматься своим делом; в частности, геометры продолжали пользоваться теорией подобных фигур. (Нечто схожее произошло в начале XX века, когда были открыты парадоксы в основаниях теории множеств; большинство математиков продолжали пользоваться этой теорией, будто ничего не случилось.) Похоже, что единственное заметное изменение в математике, вызванное этим открытием, состояло во введении доказательств от противного и доказательств, требующих скорее абстрактного рассуждения, нежели рассмотрения чертежей.

Согласно КНОРРУ, следующий шаг развития был сделан ФЕОДОРОМ ИЗ КИРЕНЫ (годы расцвета с 410 по 390 до н. э.), решившим изучать несоизмеримость. КНОРР реконструировал то, как ФЕОДОР доказывал несоизмеримость стороны единичного квадрата со сторонами квадратов, площадь которых равна 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 единицам; в этой реконструкции геометрия и теория чисел используются в том же объёме, который требовался для доказательства несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Этот метод доказательства отказывал для числа 17 (поскольку 17 за вычетом единицы делится на 8). Эта реконструкция делает правдоподобным интерпретацию диалога ПЛАТОНА *Теэтет* в качестве общего воззрения на историю развития математической теории. В диалоге, действие которого происходит в 399 г до н. э., ТЕЭТЕТ (414 – 369 до н. э.) рассказывает о том, как его учитель ФЕОДОР, объясняя свою теорию, остановился, дойдя до числа 17. (Как указывает КНОРР, текст следует читать так, что число 17 привело ФЕОДОРА в замешательство.)

Диалог продолжается утверждением ТЕЭТЕТА о том, что квадратный корень любого целого числа, которое не является точным квадратом, является иррациональным. КНОРР реконструировал, как ТЕЭТЕТ (одновременно с АРХИТОМ ТАРЕНТСКИМ, около 390 до н. э.) доказал этот результат; это доказательство требует развития как теории чисел, так и геометрии. Более того, поскольку теория чисел прикладывалась к геометрии, числа стали теперь представлять отрезками, а не фигурами из камешков (КНОРР говорит, что это произошло во время ФЕОДОРА). Это представление заметно заслоняет собой тот факт, что доказательства первоначально предполагали разглядывание фигур; теперь математика стала чисто теоретической дисциплиной.

Одним из приписываемых ТЕЭТЕТУ результатов было определение отношения и пропорции для несоизмеримых величин. (КНОРР настаивает на том, что ФЕОДОР не имел такого определения и не нуждался в нём. КНОРР говорит здесь о теории пропорций, однако ФАУЛЕР (1979) показал, что в действительности это была теория отношений. Слово «отношение» у ЕВКЛИДА по сути дела не определяется.) Эта теория была не той, что изложена в V книге *Начал* ЕВКЛИДА, но более ранней, не описанной ни в каких сохранившихся источниках, так что её пришлось реконструировать по отдельным следам.

ТЕЭТЕТ работал в Академии ПЛАТОНА в Афинах. После его смерти к Академии присоединился ЕВДОКС (395 – 340 до н. э.), и математики продолжали там свою работу. КНОРР полагает, что в это время ПЛАТОН побуждал математиков излагать свои теории в таком виде, который мы могли бы назвать аксиоматическим, когда все используемые в доказательствах теоремы (исключая аксиомы, постулаты и определения) строго доказываются. Согласно КНОРРУ, ЕВДОКС попытался доказать теорему о том, что если $A : C = B : C$, то $A = B$, ранее принимавшуюся без доказательства. Доказать её на основе определения отношения, данного ТЕЭТЕТОМ, оказалось исключительно трудно. Поэтому, когда ЕВДОКС нашёл более простое доказательство этого же результата на основе определения, известного как 5 определение V книги *Начал* ЕВКЛИДА (оно является определением пропорции, а не отношения), он смог заменить теорию ТЕЭТЕТА более простой теорией. В конечном счёте теория ТЕЭТЕТА оказалась полностью забытой.

Эта историческая реконструкция, выполненная КНОРРОМ, показывает, что математика стала теоретической дисциплиной, основанной на аксиоматическом подходе, в результате математических (а не философских) требований, исходивших от центральной теории, изучавшейся в это время, а именно от теории несоизмеримости. Более того, приведённый выше обзор этой реконструкции, начиная от косвенного доказательства несоизмеримости стороны квадрата с его диагональю, легко может быть представлен учащимся, начинающим изучать алгебру.

Это приводит нас к мысли о некоторых изменениях в начальном курсе алгебры. Я предполагаю начать с примера рассуждения без символов, представленного в начале статьи (или аналогичного ему), чтобы показать, что алгебра отличается от арифметики использованием непрямых рассуждений для решения задач и доказательством результатов в общем виде. Затем я выведу элементарные формулы для площадей фигур, используя чертежи. Формулу для площади прямоугольника можно вывести пересчитыванием квадратов; я начну с прямоугольников, стороны которых являются целыми числами, а затем перейду к прямоугольникам, стороны которых выражаются рациональными дробями. (На этой стадии я опущу всякое упоминание о иррациональных сторонах.) Затем я докажу формулы для площади параллелограмма (рис. 8) и треугольника (рис. 9).

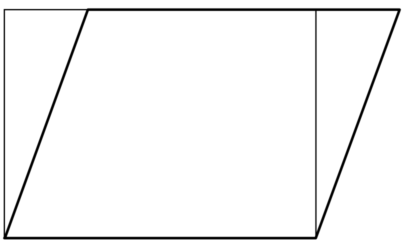

Рис. 8

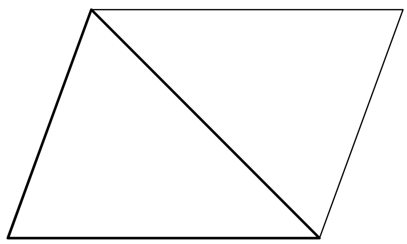

Рис. 9

Теорему Пифагора можно доказать с помощью чертежа, приведённого выше. Можно использовать камешки для доказательства элементарных теорем о чётных и нечётных числах, а далее перейти к теоремам о пифагоровых тройках и к предложенной Кнорром версии доказательства несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной.

Здесь я выберу время для критики прежнего подхода к прямоугольникам с рациональными сторонами. Эта критика будет проистекать из беспокойства о том, что имеются случаи, не охваченные нашим доказательством. В других предметах часто используется критика того, что было принято на предыдущих ступенях, и я думаю, что математика не должна быть исключением. Затем я перейду к использованию алгебраических обозначений для решения простейших уравнений и прочим традиционным вопросам.

Позднее в этом курсе хорошо будет поставить вопрос о площади круга. Я представлю результат в той форме, как он был доказан Архимедом: площадь круга равна площади треугольника, основание которого равно длине окружности, а высота — радиусу. Я использую следующий чертёж (рис. 10).

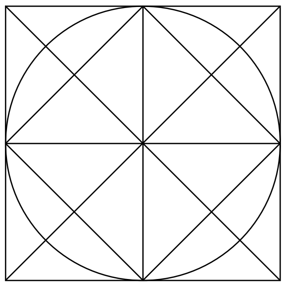

Рис. 10

Здесь изображена окружность со вписанным и описанным квадратами. Каждый квадрат разделен на четыре треугольника, основания которых образуют периметр, а вершины находятся в центре круга. Внимательно рассматривая чертёж, можно заметить, что площадь каждого квадрата равна площади треугольника, высота которого равна высотам четырёх треугольников, а основание равно периметру. В случае вписанного квадрата периметр меньше длины окружности и высота меньше радиуса; в случае описанного квадрата периметр больше длины окружности и высота равна радиусу. Если мы удвоим число сторон вписанного и описанного многоугольников, упомянутые неравенства сохранятся, согласно формуле для площади правильного многоугольника. Периметры же и площади станут заметно ближе друг к другу. Представив себе непрерывное удвоение числа сторон, мы должны будем прийти к площади круга. Это делает теорему Архимеда гораздо более понятной. Однако проблема отыскания более тщательного доказательства приводит к понятию предела, и обсуждение этой проблемы может помочь в подготовке путей к более углубленным курсам.

Литература

Архимед. *Сочинения*. Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М., Физматгиз, 1962.

Ван-дер-Варден Б. Л.. *Пробуждающаяся наука*. М., Физматгиз, 1959.

Евклид, *Начала*. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1948–51.

DELONG H. *A Profile of Mathematical Logic.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.

FOWLER D. H. Ratio in early Greek mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc.*n.s., **1**, pp. 807–846, 1979.

HEATH T. L. *A History of Greek Mathematic*s, 2 vols, Dover, NY, 1981.

HERSCOVICS N. Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In: *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebr*a, **4**. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1989, pp. 60–86.

KNORR W. R. *The Evolution of the Euclidean Element*s. Reidel, Dordrecht, 1975.

MIDDLEMISS R.. R. *College Algebra.* McGraw-Hill, NY, 1953.

STENIUS E. Foundations of mathematics: ancient Greek and modern. *Dialectic*a, **32**, pp. 255–290, 1978.

SZABY A. *The Beginnings of Greek Mathematics.* Reidel, Dordrecht, 1978. (См. также САБО А. О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования. *Историко-математические исследования*, **12**, 1959, с. 321-392.)

TORETTI R. *Philosophy of Geometry from Reimann to Poincarй.* Reidel, Dordrecht, 1978.