Историческая реконструкция математического знания [1]

Лео Роджерс

Изучение математики, обучение математике

Парадигма, всё ещё широко распространённая в обучении математике, и подвергнутая критике Лакатосом (Lakatos 1961), Даусоном (Dawson 1969), мною (Rogers 1976) и другими авторами, исходит из формалистской методологии, согласно которой обучение начинается с предъявляемого без особых оснований или объяснений списка *определений и аксиом*, образующих сложно организованную искусственную систему; за ними следуют тщательно излагаемые *леммы* и *теоремы*, и для каждой теоремы приводится *доказательство*.

Студентам предъявляется требование следовать по этому пути, и хотя официально их поощряют задавать вопросы, вскоре эти вопросы теряются в переплетениях и технических деталях изложения, и зачастую они оказываются отставленными в сторону как недостаточно «математически зрелые».

Эта картина может быть расценена как карикатура на математическое образование, однако стандартный способ изложения зачастую производит на студентов впечатление полной бессмыслицы, поскольку они ничего не знают ни о причинах, по которым преподаватель выбрал такой подход, ни о том, чем руководствовались математики, когда ставили свои задачи. Значительная часть математики предстаёт перед ними как набор итоговых результатов и инструментальных приёмов.

Этот дедуктивный стиль объявляется сущностью математики, и хотя считается допустимым упоминать об открытии и создании новых идей по ходу дела, эти идеи редко рассматриваются в историческом контексте, поскольку считается, что любые новые идеи должны быть представлены студентам сразу же в «строгой» манере.[2]

---

[1] Оригинальный текст статьи: Rogers L. Is the historical reconstruction of mathematical knowledge possible? *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique,* IREM de Montpellier, 1995, p. 105–114. Публикация перевода: Роджерс Л. Историческая реконструкция математического знания. *Математическое образование*, 2001, №1(16), с. 74–85. // Перевод с английского выполнен А. И. Щетниковым.

[2] Похоже, что формалистский подход к обучению зародился в XVIII столетии у Христиана Вольфа:

«В моих лекциях я уделил основное внимание трём аспектам: (1) я не употребил ни одного слова, которого я не объяснил бы прежде, с целью избежать двусмысленности или логических пробелов; (2) я не использовал ни одной теоремы, которую я не доказал бы прежде; (3) я постоянно связывал теоремы и определения друг с другом в непрерывную логическую цепь. Общеизвестно, что этих правил придерживаются в математике. Если сравнить математический способ обучения с логическим подходом, обсуждаемым в моей книге об умозаключениях, то можно будет увидеть, что математический способ обучения является ничем иным, как точным приложением правил умозаключения. Поэтому не имеет значения, следовать ли математическому способу обучения или правилам умозаключения, поскольку таковые верны. Поскольку я показал, что *математическое мышление отражает естественное мышление, а логическое умозаключение является всего лишь отчётливо усовершенствованным естественным мышлением, тем*

Со времён первой атаки Лакатоса прошло тридцать лет, однако многие установки остались непроницаемыми для изменений. Традицию трудно переломить, и формально-дедуктивная защита выстроена крепко. Во всяком случае, хотя некоторые изменения на уровне от начальной школы до колледжа и имели место, они были сделаны только в результате большой затраты усилий, и их сохранение требует большого количества энергии.[3]

А общераспространённая концепция математики остаётся прежней.

Математическая деятельность

Достаточно беглого взгляда на попытки дать определение математики, чтобы увидеть, что они зависят от времени, места, окружения и культуры. Некоторые классические определения выглядят теперь совершенно неуместными, особенно с тех пор, как в конце XIX века возросла роль абстрактных математических подходов и широких обобщений. Математика не только развилась как предметная область, но и стала играть новые роли в новых практиках.

Философия интуиционизма, Лакатос и позднее ATM в Англии[4] начали описывать математику как *человеческую деятельность*, избегая таким образом некоторых прежних ловушек, но создавая при этом новые. Фраза «математика — это то, чем занимаются математики» является трюизмом, однако она не проясняет нам, кто такие «математики».

Деятельностный акцент развился в интерес к тому, что мы сейчас называем процессом; были затрачены значительные усилия на объяснение стоящего за этим словом комплекса таких идей, как *математизация*, *обобщение* и *моделирование*, обсуждались также *язык*, *визуализация* и другие стороны человеческого общения.[5] С конца 1960-х по этим вопросам вышло достаточно много литературы.

самым я вполне могу заявить, что мой способ обучения следует естественному образу мышления» (Wolff 1726/1973, стр. 52–54; цит. по: Wittmann, 1992; курсив мой — Л. Р.).

Хотя в этой вере и содержатся серьёзные изъяны, всё же данная официальная догма является значимым «рабочим принципом» для многих преподавателей математики. Последний критический обзор этого подхода сделан в популярной книге Davis & Hersh 1981, pp. 274–284.

[3] Я говорю об изменениях, произошедших в Англии приблизительно за последние двадцать лет, и предполагаю, что несмотря на эти изменения, стиль школьной математики в значительной степени остаётся под сильным влиянием формалистской парадигмы. См., в частности, работы ATM по исследованиям (с 1966), приведшие к появлению работ Burton 1984, Mason, Burton & Staccy 1985, а также разработок Открытого Университета Решения Задач и Математического Мышления.

[4] Интуиционизм укоренён в кантианской философии, и в идее априорного восприятия. Хотя я и не утверждаю, что более поздние подходы школы Поппера/Пойа/Лакатоса относятся к той же традиции, некоторая общность этих подходов основывается на подчёркивании существенно более значимой роли человеческой личности в создании математики, и на разработке следствий из этого тезиса. Осознание роли социального и культурного окружения в создании математики является сравнительно недавним достижением.

[5] Исследования по языку (Pimm, Laborde и др.), по воображению и визуализации (Goldin, Dreyfus, Tall) представлены в материалах последних конференций по психологии математического образования (Proceedings of PME) и в работе Nesher & Kilpatrick 1990.

В этой литературе мы можем обнаружить скрытую общераспространённую веру в то, что в процессе изучения математики нечто создается и воссоздаётся учащимся, и элементы такой творческой деятельности объявляются общими для детей, школьников, студентов и математиков. Необходимым следствием этой веры является признание обсуждения и общения в качестве жизненных основ для роста математического знания.

Развитие математики и значение истории

До середины 1960 гг. имелось несколько широких предположений о значении истории математики для математики; эти предположения, как мы это сейчас понимаем, прямо проистекали из принятой методологии изучения математики и обучения математике. В силу этих предположений верили, что математика развивается существенно иначе, нежели естественные науки, не требуя эвристических или индуктивных рассуждений, и никак не соотносится с современными ей философскими или метафизическими идеями и социальными обстоятельствами.

КРОУ (CROWE 1992) приводит следующий список этих предположений:

• Философы и преподаватели математики настаивают на том, что математика имеет дедуктивную структуру; тем самым задача историка математики заключается в отслеживании этих дедуктивных цепочек для отдельных разделов математики. Единственное исключение делается для того случая, когда выставляется новый набор аксиом для нового «дедуктивного двигателя». Поскольку математика является *чисто рациональной*, единственный критерий оценки новых математических сущностей состоит в том, могут ли они быть выведены из исходных допущений.

• Математическое знание растёт путём накопления. Стандартный пример — неевклидова геометрия, которая не противоречит евклидовой геометрии и тем самым не отменяет её. Математика может быть улучшена. Скудная математика прошлого замещается более рафинированной современной математикой.

• Математика свободна от метафизики. В отличие от естественных наук, природа математических сущностей является априорной, бесспорной и неоспоримой.

• Строгость, доказательство и точность не зависят от времени. Будучи доказанной однажды, теорема остаётся истинной навсегда.

• В математике нет революций. См., например, ФУРЬЕ: «эта трудная наука формируется медленно, но она сохраняет всякий однажды достигнутый результат: она растёт и крепнет среди перемен и ошибок человеческого ума» (FOURIER 1822, p. 7). Многие примеры такой уверенности могут быть найдены в утверждениях математиков вплоть до наших дней.

Исследования КРОУ в «Истории векторного анализа» (CROWE 1967) показывают безосновательность всех этих предположений (быть может, за исключением последнего).[6]

[6] Замечу, что КРОУ настаивает на употреблении выражения «в математике». Это означает, что мы допускаем «революционные» изменения в символике, номенклатуре, метаматематике, методологии и даже в историографии, но все эти изменения не касаются математики как таковой. Мне думается, что это приво-

Если мы допускаем, что математика является человеческой деятельностью, нам следует принять также и то, что математика, создаваемая людьми, обладает в некотором смысле и *своей собственной* жизнью... Проблема состоит в том, что математика в качестве продукта человеческой деятельности отождествляется с *корпусом Знаний*, в результате чего она исключается из самой породившей её деятельности. В определённом смысле люди работают над известной математикой и укрепляют её; это напряжение между индивидуальным и социальным является ведущей темой книги УАЙЛДЕРА (WILDER 1968).

Мы можем рассматривать математику как живой растущий организм, в значительной мере автономный от породившей его деятельности. Математика, исходно созданная отдельными людьми и в определённом смысле принадлежавшая им, становится собственностью математического сообщества, и в качестве общественной деятельности она развивает свои собственные законы роста, свою собственную диалектику, и *отстраняется от своего прошлого*.[7]

Отстранение от прошлого означает, что на современной сцене математика обязана действовать согласно допущениям формалистской парадигмы, описанными выше. Мы столь упорно пытаемся показать, что математика является наукой *обо всём*, что вычёркиваем то частное, чем она занималась исходно.[8] Но если мы решим заглянуть за формалистский занавес, нам сразу же придётся переосмыслить нашу собственную роль в этой диалектике идей.

Я утверждаю, что реконструкция диалектики, поиск доводов, побуждений, исходных постановок задач, догадок, оправданий и т.д. осуществимы только при условии изучения истории самого предмета, через попытки реконструировать исторические ситуации. Такая реконструкция по необходимости будет умозрительной и неточной, и она конечно же зависит от доступных данных.[9] Более того, частичные интерпретации доступных данных зависят от философской установки личности, выполняющей эти интерпретации, как я это покажу ниже. И всё же важно отметить, что после работ ЛАКАТОСА по-

---

дит нас к проблеме определения, что такое математика: путь, по которому современные философы отказываются идти (см. сноску 2). Вопрос об определении математических «революций» всесторонне рассмотрел GILLES 1992.

[7] Развитая УАЙЛДЕРОМ концепция «укрепления» описывает ситуацию, в которой математики последовательно очищают частные понятия, а авторы учебников перестраивают целые математические области в соответствии с новыми категориями абстракции или частными способами изложения. Интересно рассмотреть, каким образом определение математики как отдельного автономного корпуса знаний ведёт к неявному предположению о существовании «законов», по которым происходит её эволюция. Эта и другие проблемы, касающиеся взаимоотношений между математикой, её создателями и обществом, рассматривали также WILDER, BLOOR, CROWE, D'AMBROSIO, KITCHER и др. (см. библиографию).

[8] Можно считать это парафразом РАССЕЛА: «...математика является таким предметом, в котором мы не знаем ни о чём мы говорим, ни является ли сказанное нами истинным» (RUSSELL 1956).

[9] Это утверждение существенно, но значительная часть работы уже сделана. Заметьте, что оно означает не то, что мы не можем преподавать математику, не зная её истории, но то, что исторический фон доставляет нам идеи и сведения, на которых мы можем основывать наши подходы к преподаванию. Вовсе не требуется, чтобы каждый учитель математики был в равной степени и историком математики! См. также FREUDENTHAL 1983. Работы IREMS во Франции также привели к созданию многочисленных комментариев и эпистемологических статей, посвящённых процессам исторического открытия.

нятие рационального перестало быть связанным с одной лишь описанной выше строгой дедуктивной формой, и его значение стало включать в себя «эвристику».

Реконструкция истории

Основное назначение истории — *изучение изменений, происходящих во времени* — является насущно значимым не только для той математики, которую мы изучаем сегодня, но также и для общения математиков всех уровней.

Изучая историю математики, мы имеем дело с двумя основными аспектами равной важности. Во-первых, это прошлое как таковое — документы, архивы, события и т. д., в своей совокупности называемые «фактами» — поскольку они составляют основу тех теорий прошлого, из которых развились современные теории и методы. Читая документы, мы пытаемся раскрыть содержащиеся в них концепты, так что значение архивов состоит не только в том, что они позволяют определить последовательность событий, но также в том, что их изучение раскрывает эмпирические факты, какими являются задачи, и теоретические факты, касающиеся решения этих задач. В этом смысле концепты составляют часть исходных данных истории математики.[10, 11]

Во-вторых, вслед за сбором фактов мы делаем попытки реконструировать и интерпретировать прошлое. Значение отдельного события или концепта, превращение его из простого относящегося к прошлому факта в исторический факт существенно зависит от того, как мы его истолкуем. Эти интерпретации простираются от сознательных оценок и усилий по реконструкции событий, принадлежащих историкам математики, до неосознанных истолкований, сделанных работающими математиками или преподавателями математики.

Любая программа рациональной реконструкции истории математики должна учитывать разнообразие подходов к сбору, упорядочению и истолкованию исходных сведений (фактов, мнений и предположений), и многообразие источников, из которых эти сведения черпаются.

Эти подходы распределяются по четырём различным рубрикам: эмпирическая реконструкция; концептуальная реорганизация; социальное, экономическое и культурное развитие; образцы открытий.

Эмпирическая реконструкция на протяжении долгого времени понималась большинством людей как история математики в собственном смысле. Такая история заключается в изучении источников, сборе фактов, выстраивании их в хронологическом порядке, и последующем изложении с целью дать объективный отчёт об историческом

---

[10] Даже «факты» являются противоречивыми. К примеру, см. работу Høyrup 1991, где показано, как рассмотрение одних и тех же античных культурных практик учёными разных дисциплин может привести к весьма различным выводам о том, что происходило в прошлом на самом деле.

[11] «Концепты» являются опасными вещами. Отсутствует какое-либо согласие в том, что представляет собой концепт; сделано много попыток расширить эту идею употреблением таких терминов, как концептуальная сеть, схема, рамка, и т.д. Текучим является также различение «концепта как объекта» и «концепта как инструмента», сделанное Douady & Perrin-Glorian 1989.

прогрессе математических идей. Попытки реконструировать математику прошлого путём изучения документов и раскрыть её движущие силы через существенные задачи своего времени в основном подчинялись описанной выше вере в «парадигму прогресса»: считалось, что в прошлом математика была как бы менее развита, менее полна и менее правильна, чем сегодня. Этот подход часто называют «индуктивистским» или «интерналистским». Он стремится представить развитие математики в её истории, ставившиеся физические и математические задачи, возникшую в результате исследований новую математику и её приложение к физическим и математическим задачам как эволюционный прогресс, по ходу которого математика становится лучше и лучше; при этом подразумевается, что математика прошлого постепенно отвергается как неуместная, неточная и имеющая изъяны.

Этот подход должен быть по необходимости избирательным, и тем самым попытка представить объективный отчёт о всех фактах оказывается невозможной. Имеется много учебников по истории математики, основанных на такой философии и показывающих предубеждённость автора; хорошим примером служит классический текст Кэджори (Cajori 1896), стремившегося не только дать индуктивистский отчёт об истории математики, но также внушить, что преподавание математики должно отражать исторический прогресс.[12]

Концептуальная реорганизация имеет дело как с текущей математикой, так и с истолкованием прошлого. Современная математика оценивает математику прошлого, описывая её на языке принятых сегодня концепций и решая, сознательно или неосознанно, обладает ли данный раздел математики значением и достоинствами, и правильно ли доказана данная теорема. Оценка прошлого в терминах настоящего опасна для всех аспектов истории, а не только для математики; но она особенно опасна в математике, и её сложно избежать *из-за концепции абстрактной математической структуры*.

Со структурами математики связаны глубокие философские и психологические вопросы, имеющие важное отношение к изучению истории математики, поскольку мы имеем в ней дело с основными концепциями, описывающими сами эти структуры, их появление, расширение и развёртывание, равно как и случайность либо обязательность правил действия с ними. Для примера можно привести господство концепции абстрактной группы и то, как оказалось возможным увидеть групповые структуры в математике прошлого.[13]

---

[12] Книга Кэджори «История элементарной математики с указанием на методы её преподавания» возникла вслед за его более существенной работой по истории математики (1893); в ней заметно влияние Герберта Спенсера и идеи «биогенетического закона» (онтогенез повторяет филогенез). Эта тема воспроизводится и в других книгах по преподаванию математики с исторической точки зрения; к примеру см. Branford 1908.

[13] Мэй (May 1972) оценивает такой подход к истории как один из «смертных грехов». К примеру см. многочисленные исторические заметки Бурбаки, где события в прошлом рассматриваются как прямые предшественники современных теорий, а также Zeeman 1974.

Такой подход составляет прямой контраст с описанным выше эмпирико-индуктивистским подходом, который ограничивался отбрасыванием математики прошлого как несовершенной и неполной.

Необдуманное приписывание истории современных стандартов строгости проявилось в полном переписывании истории в современных учебниках. Учебник не только стремится обратить исторический порядок, начиная с текущих принятых определений и пытаясь «критиковать» их путём немотивированных и зачастую непостижимых возражений, но вдобавок к этому он отодвигает исторический фон математики, важную «память» математической культуры, которая сегодня оказалась доступной лишь немногим.

Каждая фаза математической истории влечёт за собой переоформление, упрочнение, новое начало. С практической точки зрения принято считать, что быстрый рост общего числа письменных текстов способствует повышению эффективности коммуникации, и нет никакого иного выбора. В итоге студенты отсекаются от исторического фона математики, и важно предупредить об этой опасности как студентов, так и преподавателей.

Социальное, экономическое и культурное развитие. Здесь история изучается с точки зрения сил, внешних по отношению к математической теории и структурам. Этот подход рассматривает влияние социальных изменений на центры математического развития; связь различных форм покровительства со свободой развития, приоритетами и манерами математики; влияние отдельных лиц на исследовательские программы; технические и социальные проблемы, подлежащие рассмотрению математики; требования инвесторов и ограничения со стороны экономических условий. Эти аспекты встроены в конкретную культуру и конкретное время. Хотя эти влияния и не касаются деталей математических теорий, однако они часто определяют основное направление и темпы развития математики.[14]

Общества также могут выступать «носителями» математического знания; это показывают разнообразные ситуации, в которых используются разные виды специализированной математики, от торговли до инженерного дела. Сами теории могут «социально существовать» как минимум двояко: в первом случае потребители вносят существенный вклад в развитие теории, во втором случае они хотя и не делают таких вкладов, но всё же понимают, что теория даёт важный вклад в их собственную сферу деятельности, и во всю математику в целом.

Кроме людей, очевидными носителями математического знания являются учебники, журналы, монографии и т. п.; сегодня применяются и другие средства: кино, видео, компьютерные диски и электронная почта.

Возможно, что теория может иметь *математическое* существование, но если она не принята и не используется математическим сообществом, это существование не являет-

[14] Тому есть много примеров: развитие математического мастерства, техники и обозначений было вызвано возникновением городов-государств и центров торговли; развитием письменности, связи и изобретением печати; развитием техники; военными нуждами, и т. д. К примеру, см. BLOOR 1991 и WILDER 1981.

ся *социальным*, и она не оказывает никакого (или почти никакого) влияния на последующее развитие математики.[15]

Образцы открытий исследуются равно философами и историками, — в том смысле, что попытки историков точно выяснить, что именно открыл тот или иной математик, предполагают наличие стоящей за данным открытием философии, веру в некоторую логику открытия. Различие между историком и философом состоит в акценте интересов: имея дело с анализом проблемных ситуаций, философ ориентирован по преимуществу на понимание теоретических систем и критических доводов, тогда как историк стремится реконструировать сами эти проблемные ситуации. Философ использует исторические факты в качестве материала, тогда как историк устанавливает эти факты. Каждая из этих двух деятельностей очевидно не исключает другую.

Здесь мы имеем дело с попытками построить философию математики на основе исследования особенностей индивидуальных творческих процессов; изучая такого рода исторические вклады, историческая наука пытается сформулировать логику математического открытия и психологию изобретения. Эта область затрагивает одну значительнейшую проблему, связанную с математикой, а именно: *как сделать математику значимой в рамках всей культуры в целом, и интеллектуально доступной на всех уровнях*. Эта проблема не может быть разрешена без хорошей философии: та же, в свою очередь, должна обращаться к истории за большей частью своего материала.

Важно различать гипотетическую *реконструкцию* исходной задачи, представляющую собой догадку о реальной задаче, с которой имел дело математик, и проблему *понимания реконструкции*. Слияние метазадач и метатеорий историков математики с имевшимися в истории задачами и теориями математиков способно привести к обширной дискуссии.

БАШЛЯР (BACHELARD 1940) определил эпистемологический профиль как анализ деятельности индивида, основанный на анализе понятий, и эпистемологическое препятствие как такое понятие или метод, которое препятствует прорыву индивида к новому эпистемологическому состоянию (пример: ГАМИЛЬТОН и открытие кватернионов). Согласно БАШЛЯРУ, история науки должна объяснять прошлое на языке его собственных понятий и признавать отвергнутые результаты наравне с признанными достижениями.[16]

---

[15] О математическом существовании я говорю в том смысле, как если бы кто-нибудь построил теорию, удовлетворяющую определённым заявленным критериям, но она не вошла бы в практику других математиков. Это в принципе возможно, но трудно привести тому примеры, потому что мы о них к несчастью ничего не будем знать. Однако мы можем рассматривать квадратуру круга и трисекцию угла в качестве такого рода примеров; таковы также некоторые крайние формы интуиционизма и конструктивизма. Для своего социального существования математика вовсе не должна быть «живой» в данный момент. Достаточно, чтобы было засвидетельствовано использование математической практики и теории той или иной группой людей в то или иное время.

[16] Тому есть множество примеров в естественных науках. Так теория теплорода является ценным достижением, но отвергнутым результатом. Сходные эпизоды в математике обычно попросту игнорируются.

Герменевтика, математика и её история

Классическая герменевтика возникла в девятнадцатом столетии как теория, обобщающая воспроизводящиеся попытки улучшить истолкование античных текстов. Герменевтика имеет дело с пониманием, и прежде всего — пониманием письменного текста, однако идее текста может быть придан и более широкий смысл, используемый сегодня.[17] Тем самым она может иметь отношение к весьма широкому кругу вопросов, от анализа текста до природы исторического понимания и философии общения.

В герменевтике традиционно проводилось различение гуманитарных наук и наук о природе. Обращая внимание прежде всего на смыслы, герменевтика отграничивала гуманитарные науки от тех, где исключение человеческих элементов являлось рабочим принципом. Что касается математики, то глубинная вера в то, что человеческие элементы могут быть исключены из неё, распространена здесь настолько широко, что о ней даже не принято говорить.

Однако математические сущности и отношения между ними встроены в комплексную знаковую систему, созданную людьми для своих нужд, и смыслы этой знаковой системы могут быть понятны лишь тем, кто хочет заниматься математикой или применять её.[18]

Поскольку история является деятельностью по интерпретации, и поскольку в истории математики мы постоянно исследуем смыслы интересующих нас текстов, представляется ясным, что абсолютная точность постижения того, что именно хотел сообщить автор текста, постоянно остаётся под вопросом. Хорошим примером тому служит публикация «нематематических» идей Исаака Ньютона (Fauvel 1988), когда математический истэблишмент Англии полностью проигнорировал философские и метафизические идеи, которые могли привести Ньютона к формулировке концепции «силы». Формула «$F = ma$» с герменевтической точки зрения ещё требует интерпретации (Rogers 1990).

Значимость для обучения

Педагогика имеет дело и с творчеством, и с открытиями. Эвристика стимулирует математические открытия, доставляя принципы анализа действий в аналогичных ситуациях. Эвристические подходы, характерные для творческого развития математических понятий, позволяют создавать такие ситуации, в которых учащиеся могут изменить свои понятийные представления. Примером попыток внедрить эвристику в практику обучения служат воплощения широкой программы Пойа, сделанные Бартоном (Burton 1984) и другими.

---

[17] Текстами в современном смысле являются все формы письменности, включая музыкальную и танцевальную нотацию, а также фотографии, кино- и видеофильмы, плакаты и живопись.

[18] Коэн (Cohen 1985) выделяет четыре признака, по которым можно определить, произошла ли научная революция: (1) свидетельства современников (включая оценку учёными их собственной работы); (2) критическая проверка документированной истории предмета; (3) суждения компетентных историков, особенно историков науки и философии; (4) общее мнение работающих сегодня учёных.

Изучая историю математики, мы не только исследуем разные стороны процесса развития математики, но и многое узнаём о важных контекстах её существования: психологическом, социальном, культурном, экономическом и других. Я должен сказать, что хотя изучение математики в аудитории ни в каком смысле не способно отразить историю, всё же нам есть чему поучиться у разных точек зрения на историю, описанных выше.

Библиография

ATM 1966. *The development of mathematical activity in children: the place of the problem in this development.* ATM Derby.

ATM 1980. *Mathematical investigation in the classroom*. ATM Derby.

BACHELARD G. 1940. *La philosophie du non: Essai d'une philosophie du nouvel espirit scientifique.* Paris, Presse Universitaires de France. [БАШЛЯР Г. Философское отрицание: Опыт философии нового научного духа. В кн.: БАШЛЯР Г. *Новый рационализм*. М., Прогресс, 1987, с. 160–283.]

BLOOR D. 1976/1991. *Knowledge and social strategy*. Univ. of Chicago Press.

BRANFORD B. 1908. *A study of mathematical education including the teaching of arithmetic*. Oxford.

BURTON L. 1984. *Thinking things through*. Oxford, Blackwell.

CAJORI F. 1893. *A history of mathematics*. NY, Macmillan.

CAJORI F. 1896. *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching*. NY & London, Macmillan. [КЭДЖОРИ Ф. *История элементарной арифметики с указанием на методы преподавания*. Одесса, Mathesis, 1917.]

COHEN I. B. 1985. *Revolution in science*. Harvard Univ. Press.

CROWE M. J. 1967. *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. Notre Dame Univ. Press.

CROWE M. J. 1975. Ten 'laws' concerning the patterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, **2**, pp. 161–166.

CROWE M. J. 1975. *Afterword (1992): a revolution in the historiography of mathematics?* In GILLES (1992), op. cit., pp. 306–316.

D'AMBROSIO U. 1985. Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of mathematics*, **5**, pp. 44–48.

DAVIS P. J, HERSH R. 1981. *The mathematical experience*. Harvester Press (rep. Penguin 1990).

DAWSON S. 1969. *The implication of the work of Popper, Polya and Lakatos for a model of mathematics instruction.* Unpublished dissertation. Univ. of Alberta, Canada.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN J. 1989. Un processus d'apprentisage du concept d'aire de surfase plane. *Educational Studies in Mathematics*, **20**, pp. 387–424.

FAUVEL J. et al. (Eds.) 1989. *Let Newton be!* Oxford Univ. Press.

FOURIER J. 1822. *Theorie analitique de la chaleur*. Tr. Freeman A. as «*Analytical theory of heat*», Dover, 1955.

FREUDENTHAL H. 1983. *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

GILLES D. (Ed.) 1992. *Revolutions in mathematics*. Oxford, Clarendon Press.

HØYRUP J. 1991. *Changing trends in the historiography of Mesopotamian mathematics*. Privately circulated contribution to the conference of contemporary trends in the historiography of sciences. Corfu.

KITCHER P. 1983. *The nature of mathematical knowledge*. Oxford.

LAKATOS I. 1961. *Essays in the logic of mathematical discovery*. Ph. D. Dissertation. Cambridge. First published as «Proofs and refutations» in British Journal for the Philosophy of Science (1962) and later as LAKATOS I. 1972. *Proofs and refutations*. Eds. Worall J. and Zahar E. Cambridge. [ЛАКАТОС И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы*. М., Наука, 1967.]

MASON J., BARTON I., STACCY K. 1985. *Thinking mathematically*. Open University.

MAY K. 1972. *Bibliography and research manual in the history of mathematics*. Toronto.

NESHER P., KILPATRICK J. 1990. *Mathematics and cognition*. Cambridge Univ. Press.

ROGERS L. 1975. *The history of mathematics and its implication for teaching*. Unpublished dissertation. Leicester, School of Education.

ROGERS L. 1990. The great ocean of truth. Essay review of FAUVEL 1988 in *Mathematics Teaching* #136 Sept. 1991, pp. 48–49.

RUSSELL B. 1956. Mathematics and the metaphysicians.

NEWNANN J. R. (Ed.) 1956. *The world of mathematics*. 4 vol. Vol. 3 (1578–1590). Allen & Unwin.

SEEGER F., STEINBRING H. 1972. *The dialogue between theory and practice in mathematical education: overcoming the broadcast metaphor*. Bielfeld, Institut fur Didaktik der Mathematik.

WILDER R. L. 1968/1974. *The evolution of mathematical concepts*. Wiley.

WILDER R. L. 1981. *Mathematics as a cultural system*. Pergamon.

WITTMANN E. C. 1992. *One source of the broadcast metaphor: mathematical formalism*. In: SEEGER F., STEINBRING H. 1972., op. cit., p. 116.

WOLFF C. 1973. *Ausfuhrlishe Nachriht von seinen eigenen Schriften*. Kap. 3: Von der Lerhart des Autoris. ss. 52–124. Ges. Werke, 1. Abt. Deutsche Schriften Band 9. Hildesheim/NY/Olms.

ZEEMAN C. 1974. Research, ancient and modern. *Bulletin of the Institute of mathematics and its applications*, **10**, pp. 272–281.