Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе

А. И. Щетников

Введение

В 1638 году английский астроном Джон Гривз посетил пирамиды Гизы и тщательно их обмерил, с намерением извлечь из этих обмеров древние меры длины, которые, как считалось уже в то время, должны соотноситься с размерами Земли. Результаты этих обмеров и их истолкование он изложил в трактате *Пирамидография, или описание египетских пирамид*, изданном посмертно в 1646 году. За последующие три с лишним века по данной теме накопилась необозримая литература, авторы которой считали египетские пирамиды своего рода «тайными хранилищами» древних математических, метрологических, географических и астрономических знаний, зачастую — самых удивительных и невообразимых.

Даже если оставить в стороне теории фантастического характера, к настоящему времени и без них накопилось немало геометрических и метрологических объяснений того, исходя из каких соображений для пирамид выбирались определённые пропорции и размеры (см. Владимиров 1944, Лауэр 1966, Herz-Fischler 2000, Rossi 2004). Одна популярная гипотеза обращает внимание на то, что отношение удвоенной стороны основания пирамиды Хеопса к её высоте равно $\frac{2\cdot 230,4}{146,6}$ = 3,143... , что весьма близко к числу π = 3,141... Ещё одно объяснение исходит из того, что возведённое в квадрат отношение высоты пирамиды Хеопса к половине её основания $\left(\frac{146,6}{230,4:2}\right)^2$ = 1,619... близко к числу золотого сечения φ = 1,618... Согласно третьей гипотезе, углы наклона граней пирамид Хеопса 51°50' и Микерина 51°20' близки к $\frac{4}{7}\cdot 90° = 51°26'$. И все эти гипотезы, сколь бы они ни различались между собой, равно претендуют на объяснение замысла строителей пирамид.

Широкая фантазия пирамидологов вызвала ответную реакцию со стороны критически настроенных исследователей античной математики и архитектуры. По мнению критиков, математические знания древних египтян следует изучать не по обмерам памятников архитектуры, допускающим очень широкий спектр интерпретаций, но исключительно по нескольким дошедшим до наших дней математическим папирусам, восходящим к концу III тысячелетия до н. э., из каковых наиболее богаты содержанием папирус Ринда и Московский папирус (обзор этих папирусов см. Бобынин 1882, 1909, Peet 1923, Chase, Bull & Manning 1929, Struve 1930, Выгодский 1967, Gillings 1972, Robins & Shute 1987). Что касается пропорций пирамид, эта тема всецело относится к истории архитектуры, причём объяснять эти пропорции надлежит на основе сугубо практических соображений, а не математических спекуляций.

Идейное остриё проблемы пропорций пирамид в Гизе, как я его понимаю, состоит в том, чтобы правдоподобно истолковать целочисленное отношение 14 : 11, которое в пирамиде Хеопса с хорошей точностью образуют высота и половина стороны основания. В двух других пирамидах Гизы аналогичные соотношения имеют более простой вид: 4 : 3 в пирамиде Хефрена и 5 : 4 в пирамиде Микерина. Конечно, можно вводить в рассмотрение и другие размеры фронтального и диагонального, — но в процессе строительства пирамиды именно её высота и половина стороны должны были выступать в качестве формообразующих размеров.

Мне думается, что отношение 14 : 11 слишком необычно, чтобы кто-то заложил его в проект пирамиды без особых на то оснований. Поэтому я склоняюсь к предположению о том, что это отношение было выведено математически из некоторых предзаданных условий. При этом я возвращаюсь к гипотезе о том, что пропорции пирамиды Хеопса связаны с отношением золотого сечения, выдвинутой ещё в 1855 г. Г. Ребером (тем более что эта гипотеза подтверждается известным свидетельством Геродота).

Особенность предлагаемого подхода состоит в том, что в размерах и пропорциях пирамиды отыскиваются не иррациональные отношения как таковые, но рациональные приближения этих отношений, задаваемые парами целых чисел. В самом деле, геометр может строить нужные квадратичные иррациональности с помощью циркуля и линейки. Но когда дело касается практического отмеривания длин в строительстве и архитектуре, предложенные геометром построения могут оказаться неудобными. Ведь здесь все размеры надо задавать в целых числах, исходя из общепринятых мер длины: ладоней, ступней, локтей, и т. д. Однако квадратные корни из неквадратных чисел иррациональны, и соответствующие длины в теории оказываются несоизмеримыми. Отсюда проистекает проблема практического приближения иррациональных отношений рациональными, задаваемыми парами целых чисел. Эти рациональные приближения я единообразно получаю с помощью простого математического метода, родственного методу Герона, и основанного на простых приёмах перекладывания частей единичных квадратов.

Полученные результаты согласуются с известными фактами древнеегипетской метрологии, что служит ещё одним доводом в пользу их правдоподобия.

Геометрическое определение «золотого» треугольника

Форма прямоугольного треугольника задаётся отношением его катетов. К выбору этой формы приводит проблема выбора отношения между размахом основания a и высотой h при строительстве пирамид (рис. 1). Пирамида — это священное сооружение, а потому она должна иметь не какой-то случайным образом выбранный угол наклона грани, но *самый лучший* из всех возможных углов.

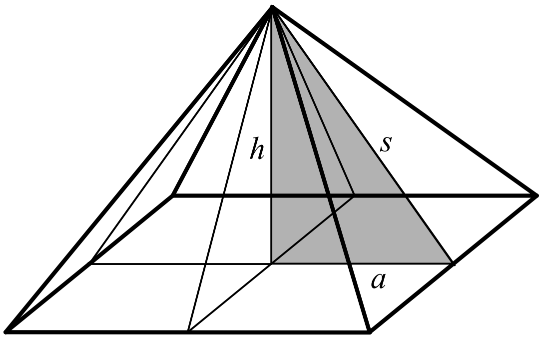

Рис. 1

Современному читателю такая постановка вопроса может показаться странной, если не бессмысленной. В самом деле, разве один треугольник может быть лучше другого? Но в древности люди мыслили иначе, и для них одна фигура действительно могла быть лучше, *совершеннее* другой. Самая совершенная фигура — это круг: эта мысль была общим местом всей философии математики от античности до эпохи Возрождения. Прямой угол совершеннее острого и тупого, квадрат совершеннее прямоугольника, а прямоугольник в свою очередь совершеннее трапеции. То же и для чисел: и не случайно числа, равные сумме своих делителей, получили название совершенных ещё в глубокой древности. А в списке парных начал пифагорейцев, который приводит Аристотель в *Метафизике* (986a20–26), такие начала, как предел, прямое, неподвижное, квадратное соответствуют хорошему, а парные к ним беспредельное, кривое, движущееся, продолговатое сопутствуют дурному.

Общий принцип этого противопоставления обсуждал А. В. Родин (2003). Мы рассмотрим его на примере трёх видов углов. Прямой угол — один-единственый, и в пределах своего вида он не может быть больше или меньше. А вот острый угол как таковой — неопределён, и в пределах своего вида всякий острый угол может сделаться большим или меньшим. То же самое и для тупого угла. Поэтому прямой угол — самый совершенный, ведь он в границах своего вида всегда равен самому себе. А прочие углы могут быть как больше, так и меньше прямого. И определения их зависимы от определения прямого угла — «острым называется угол, который меньше прямого, а тупым — угол, который больше прямого». Прямой же угол — это «золотая середина» (aurea mediocrita) между избытком и недостатком, если воспользоваться выражением, которое употребил Гораций в оде II,3. Точно так же имеется одна определённая прямая линия среди беспредельного множества кривых, один квадрат среди беспредельного множества продолговатых прямоугольников, и так далее. И всё определённое — то, что не может измениться, не потеряв своего видового качества, — является совершенным.

Теперь мы вернёмся к исходному вопросу о том, как «наилучшим образом» должны соотноситься между собой базовые размеры пирамиды. Понятно, что ответы на этот вопрос могут быть самыми разными. Один человек может сказать, что самым совершенным среди треугольников является равносторонний треугольник, а поэтому пирамида в сечении должна иметь вид такого треугольника. Другой — что самым совершенным среди четырёхугольников является квадрат, а потому и пирамида в сечении должна быть половиной квадрата. При этом могут рассматриваться как фронтальные, так и диагональные сечения. Достаточно изящным выглядит решение, в котором боковые грани пирамиды являются равносторонними треугольниками. Именно такие пропорции имеет пирамида в Лиште, построенная Аменемхетом I, основателем XII династии Среднего царства. Однако пирамиды в Гизе, принадлежащие фараонам IV династии Древнего царства, построены по другим пропорциям.

Среди возможных ответов на поставленный выше вопрос может быть предложен и такой. Рассмотрим произвольный прямоугольный треугольник, стоящий на одном из катетов. Опустим в этом треугольнике перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу. Он разделит треугольник на два — верхний и нижний. В верхнем треугольнике вновь опустим перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу. Она опять разделит этот треугольник на две части. Все получившиеся треугольники подобны между собой. Будем сравнивать между собой самый нижний и самый верхний треугольники. В зависимости от наклона гипотенузы возможны случаи, когда верхний треугольник будет меньше нижнего, равен ему и больше его (рис. 2). Срединный случай равенства мы и объявим самым совершенным, «золотым».

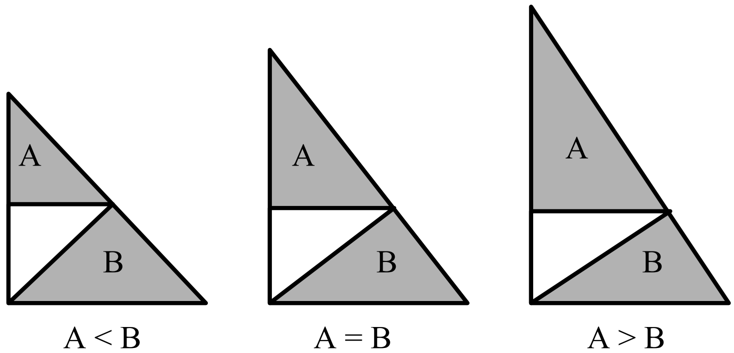

Рис. 2

Описание золотого треугольника на языке пропорций

Наш «золотой» треугольник ещё раз изображён на рис. 3. С одной стороны, мы видим, что гипотенуза AC делится точкой D на два отрезка $s = a + b$. С другой стороны, из подобия прямоугольных треугольников ABC и AED мы получаем непрерывную пропорцию $s : a = a : b$. Таким образом, в «золотом» треугольнике гипотенуза s так относится к меньшему катету a, как этот катет относится к его дополнению b до гипотенузы. Тем самым гипотенуза AC делится точкой D в так называемом «среднем и крайнем отношении». Такая терминология была принята в *Началах* Евклида, а ныне данное отношение принято называть также «золотым сечением».

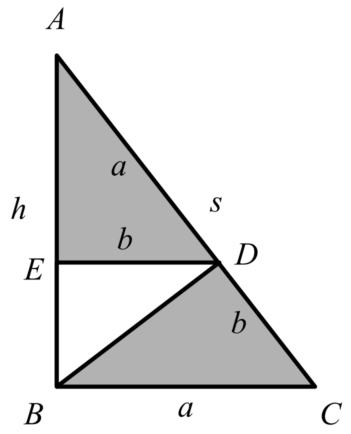

Рис. 3

Полученная пропорция перемножением «крест-накрест» приводится к виду $a^2 = sb$. Тем самым получается ещё одному определение золотого сечения: «Отрезок разделён в отношении золотого сечения, если прямоугольник, заключённый между целым отрезком и одной из его частей, равен квадрату на оставшейся части».

Из подобия прямоугольных треугольников ABC и ADB мы получаем ещё одну непрерывную пропорцию $s : h = h : a$. Тем самым больший катет h «золотого» треугольника является средним пропорциональным между его гипотенузой s и меньшим катетом a. Наличие такой пропорции между сторонами может служить ещё одним определением «золотого» треугольника, называемого в пирамидологической литературе «треугольником Кеплера» или «треугольником Прайса».

Последняя пропорция перемножением «крест-накрест» приводится к виду $h^2 = sa$. При выполнении этого соотношения площадь грани пирамиды очевидно оказывается равной квадрату её высоты. Ниже мы увидим, что именно этим равенством площадей Геродот определяет пропорции пирамиды Хеопса.

Переход к языку равенства площадей

Для нас перемножение членов пропорции «крест-накрест» — операция элементарная. Для древних это было совсем не так, — особенно когда дело касалось пропорций не между числами, а между отрезками. Здесь на помощь приходит техника преобразования площадей, известная в частности по одному из доказательств теоремы Пифагора (рис. 4). На катетах треугольника ABC построены квадраты $BCDE$ и $ACHI$, и из вершины прямого угла B на гипотенузу AC опущен перпендикуляр, продолженный до пересечения со стороной HI в точке L. Кроме того, на чертеже построены параллелограммы $ACDE$ и $BCHG$. Нетрудно видеть, что квадрат $BCDE$ равновелик параллелограмму $ACDE$, параллелограмм $ACDE$ равновелик параллелограмму $BCHG$, и параллелограмм $BCHG$ равновелик прямоугольнику $KLCH$. Тем самым квадрат $BCDE$ со стороной a равновелик прямоугольнику $KLCH$ со сторонами s и b. Но это и есть перемножение членов пропорции «крест-накрест», произведённое чисто геометрическим путём.

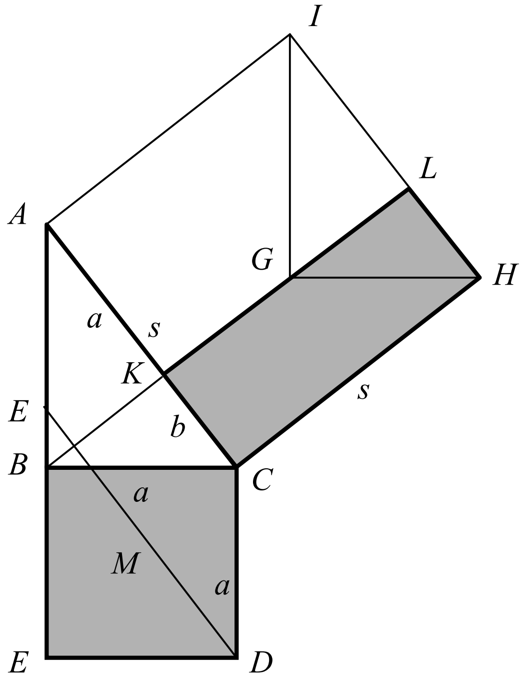

Рис. 4

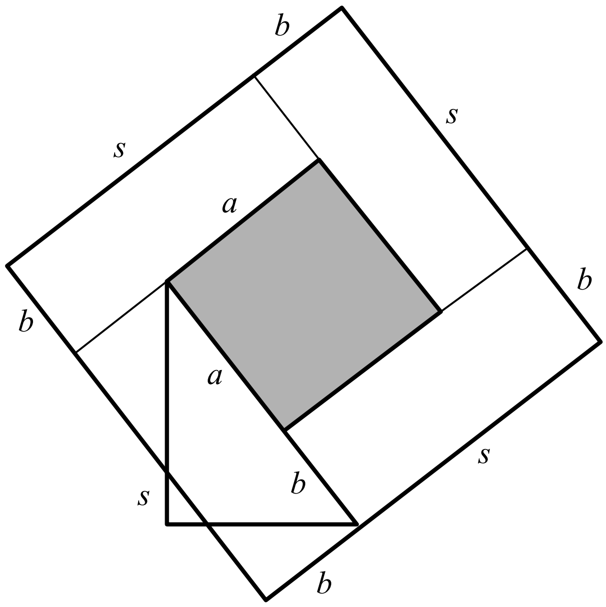

Рис. 5

Вычисление элементов золотого сечения с помощью «рамы»

На рис. 5, который получен перестройкой рис. 4, однофутовый квадрат $a \times a$ окружён четырьмя однофутовыми прямоугольниками $s \times b$, при этом все пять однофутовых фигур складываются в пятифутовый квадрат, сторона которого есть $\sqrt{5}$. Нетрудно видеть, что $\sqrt{5} = 2b + 1 = 2s - 1$, откуда $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $s = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Приближённое извлечение квадратных корней

Рассмотрим простейший метод, позволяющий получать рациональные приближения квадратных корней из целых неквадратных чисел, родственный методу Герона (см. ВЫГОДСКИЙ 1967). К примеру, пусть нам надо найти какое-нибудь рациональное приближение для $\sqrt{5}$. Разрежем 5 единичных квадратов на $5m^2$ меньших квадратиков, и выложим из этих квадратиков наибольшее квадратное число k^2, не превышающее $5m^2$. Отношение $k : m$ уже можно рассматривать как простейшее рациональное приближение для $\sqrt{5}$. Но это приближение можно заметно улучшить. Ведь у нас остались неиспользованными $p = 5m^2 - k^2$ квадратиков. Разрежем каждый такой квадратик по одному из направлений на $2k$ полосок одинаковой ширины, и выложим все полоски рядами вдоль двух сторон квадрата k^2, чтобы получилась фигура, называемая гномоном. На рис. 6 показано это построение и ещё один его вариант для случая $m = 5$, когда $k = 11$, $p = 5 \cdot 5^2 - 11^2 = 4$.

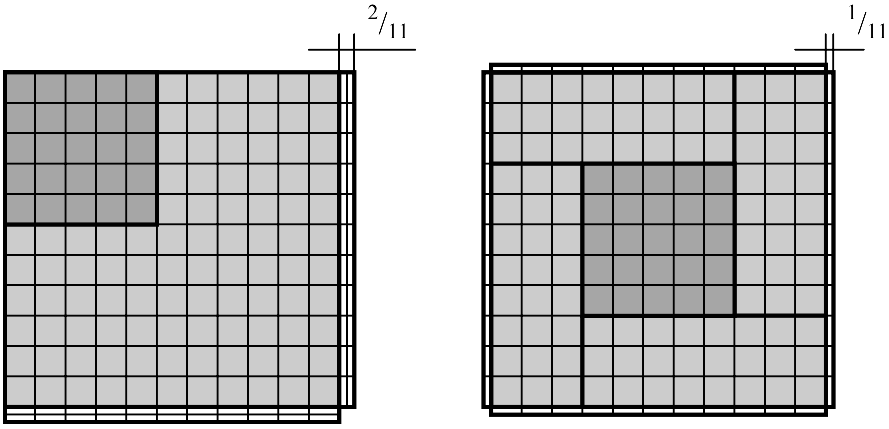

Рис. 6

Длина стороны гномона, выраженная в ширинах полосок, равна $2k^2 + p = 5m^2 + k^2$; длина стороны единичного квадрата в этих же единицах равна $2mk$. Отношение этих длин будет служить улучшенным рациональным приближением для $\sqrt{5}$. Соответствующие приближения для m от 1 до 7 приведены в таблице.

m	$5m^2$	k	k^2	$5m^2 + k^2$	$2mk$	$m : k$	$(5m^2 + k^2) : (2mk)$
1	5	2	4	9	4	2 : 1	9 : 4
2	20	4	16	36	16	2 : 1	9 : 4
3	45	6	36	81	36	2 : 1	9 : 4
4	80	8	64	144	64	2 : 1	9 : 4
5	125	11	121	246	110	**11 : 5**	**123 : 55**
6	180	13	169	349	156	13 : 6	349 : 156
7	245	15	225	470	210	15 : 7	**47 : 21**

Мы видим, что при увеличении m от 1 до 4 приближения $\sqrt{5}$ не улучшаются; и первое заметное улучшение происходит при $m = 5$. Приближения, которые будут интересовать нас ниже, выделены в таблице полужирным шрифтом.

Если приближение для $\sqrt{5}$ представляется отношением целых чисел $a : b$, то соответствующее приближение для золотого отношения $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ будет равно $(a + b) : 2b$. Соответственно для 11 : 5 получается приближение золотого отношения 8 : 5, для 123 : 55 — 89 : 55, для 47 : 21 — 34 : 21.

Продолжение вычислений

Мы нашли приближённое отношение гипотенузы к меньшему катету $s : a$; найдём теперь приближённое отношение большего катета к меньшему $h : a$. Можно воспользоваться как тем, что $h = \sqrt{as}$, так и тем, что $h = \sqrt{s^2 - a^2}$. Для наших численных данных более удобным оказывается второй путь. Результаты вычислений для трёх указанных выше значений a и s приведены в таблице. В первых двух строках квадратные корни вычислялись по методу Герона; в третьей строке использовано неутончённое целочисленное приближение. В таблице приведены также соответствующие найдённым значениям h целочисленные квазипифагоровы тройки (КПТ).

a	s	$s^2 - a^2$	$\sqrt{s^2 - a^2}$	КПТ
5	8	39	$6^1/_4$	**20, 25, 32**
21	34	715	$26^3/_4$	84, 107, 132
55	89	4896	70	**55, 70, 89**

Наибольший интерес для дальнейшего представляют квазипифагоровы тройки (20, 25, 32) и (55, 70, 89). В первой тройке $20^2 + 25^2 = 1025$, $32^2 = 1024$. Во второй тройке $55^2 + 70^2 = 7925$, $89^2 = 7921$.

Результаты обмера больших пирамид в Гизе

Рассмотрим результаты обмера трёх больших пирамид в Гизе. Верхушки пирамид давно разрушены, и реальный обмер пирамид неоднократно производился следующим образом (см., к примеру, PETRIE 1883, BORCHARDT 1926). Сначала измерялась сторона основания пирамиды $2a$, затем с помощью теодолита определялся угол наклона грани, и уже по этим результатам рассчитывалась высота пирамиды h. Поэтому надо понимать, что хотя точность измерения длины стороны основания могла быть порядка 1 см, при этом точность определения высоты была заметно более низкой.

Отношения базовых размеров для каждой пирамиды я разложил в цепную дробь, в каждом случае — до первого большого подходящего частного, после чего вновь свернул каждую «усечённую» цепную дробь в обыкновенную. У нас имеются все основания предполагать, что именно указанные в этой таблице целочисленные отношения сторон и пытались воплотить в пирамидах их зодчие.

	a	h	$h : a$
ХЕОПС	115,2	146,6	$1+\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{52+\ldots} = 14 : 11$
ХЕФРЕН	107,6	143,5	$1+\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{358+\ldots} = 4 : 3$
МИКЕРИН	52,3	65,5	$1+\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{25+\ldots} = 5 : 4$

Прежде всего, мы видим, что при постройке пирамиды ХЕФРЕНА использовался формообразующий прямоугольный треугольник с отношением сторон, заданным пифагоровой тройкой (3, 4, 5).

Для пирамиды МИКЕРИНА отношение высоты к размаху составляет 5 : 4. Предположим, что в проект закладывалось также целочисленное значение наклона грани. Тем самым базовый треугольник пирамиды приближённо выражается квазипифагоровой тройкой (20, 25, 32). Чтобы найти модульную единицу проекта, следует разделить любой из размеров пирамиды на соответствующее ему число в формообразующем треугольнике. Сделаем это для высоты: 65,5 : 25 = 2,61 м. Эту модульную единицу мы будем называть «сажень I». Размеры пирамиды МИКЕРИНА равны 25 саженей I по высоте, 20 по размаху и 32 по наклону.

Для пирамиды Хеопса отношение катетов равно 11 : 14. Я буду предполагать, что это отношение ведёт своё происхождение от стремления максимально приблизить формообразующий треугольник пирамиды к «золотому». Модульная единица равна здесь 146,6 : 14 = 10,47 м; мы будем называть её «строительный шнур». Нетрудно видеть, что один шнур с хорошей точностью равен 4 «саженям I». Если мы хотим, чтобы наклон пирамиды Хеопса также выражался приближённо целым числом, надо перейти к базовому треугольнику (55, 70, 89). Это даст новый модуль, равному 1/5 от шнура. Мы назовём его «сажень II». Размеры пирамиды Хеопса равны 70 саженей II по высоте, 55 по размаху и 89 по наклону.

Ещё одна единица, извлекаемая из обмера пирамид Хеопса и Микерина, равна разности обеих «саженей» в 1/4 и 1/5 шнура, что составляет 1/20 шнура = 52,35 см. В обмерах памятников древнеегипетской архитектуры эта модульная единица встречается очень часто; её принято называть «царским локтем».

Что касается более мелких мер длины, то для их восстановления используют обмеры внутренних камер, саркофагов и т. п. Установлено, что царский локоть делится на 7 ладоней по 3 дюйма в каждой ладони, либо на 3 пяди по 7 дюймов в каждой пяди, всего 21 дюйм в локте. Кроме дюйма, использовалась и более мелкая мера длины в один палец, получаемая делением ладони на 4 части; соответственно локоть состоит из 28 пальцев. Ещё одна часто используемая мера длины — фут в 16 дюймов.

Приведённые ниже размеры пирамид в Гизе выражены в египетских мерах длины. Размеры пирамиды Хефрена не выражаются целым числом локтей, зато они удачно выражаются целым числом футов.

Размеры пирамид в Гизе

а) Пирамида Микерина.
Размах = 20 саженей I = 100 локтей.
Высота = 25 саженей I = 125 локтей.
Расчётный целочисленный уклон = 32 сажени I = 160 локтей.
Уклон, рассчитанный по теореме Пифагора = $\sqrt{100^2 + 125^2}$ = 160,08 локтя.

б) Пирамида Хеопса.
Размах = 11 шнуров = 55 саженей II = 220 локтей.
Высота = 14 шнуров = 70 саженей II = 280 локтей.
Расчётный целочисленный уклон = 89 саженей II = 356 локтей.
Уклон, рассчитанный по теореме Пифагора = $\sqrt{220^2 + 280^2}$ = 356,09 локтя.

в) Пирамида Хефрена.
Размах = 360 футов.
Высота = 480 футов.
Уклон = 600 футов.

Геродот о пирамиде Хеопса

О пропорциях, заложенных в пирамиду Хеопса, имеется известное свидетельство Геродота (II, 124):

> *τῆς ἐστι πανταχῇ μέτωπον ἕκαστον ὀκτὼ πλέθρα ἐούσης τετραγώνου καὶ ὕψος ἴσον, λίθου δὲ ξεστοῦ τε καὶ ἁρμοσμένου τὰ μάλιστα· οὐδεὶς τῶν λίθων τριήκοντα ποδῶν ἐλάσσων.*
>
> У неё с каждой стороны грань в восемь плетров, квадратная и равная высоте. Она сложена из тёсаных и прилаженных камней, каждый камень по меньшей мере в тридцать футов.

О правильном чтении первого предложения см. комментарий Д. Д. Мордухай-Болтовского (*Начала Евклида* 1950, т. 3, с. 297–299), где показано, что его надо понимать так: «У неё с каждой стороны грань в восемь плетров, равная квадрату высоты». Плетр — это площадь квадрата размером 100 × 100 локтей. Квадрат высоты пирамиды равен 280 × 280 = 78400 квадратных локтей, что составляет приблизительно 8 плетров. Но и расчётная площадь грани равна 356 × 220 = 78320 квадратных локтей.

Что касается второго предложения, оно тоже должно быть прочитано правильно. Указанная Геродотом величина 30 футов не имеет никакого отношения к линейным размерам каменных блоков, из которых сложена пирамида. Однако объём этих блоков действительно составляет несколько более 30 кубических футов.

Строительный шнур в 420 дюймов как базовая единица длины

Мы будем исходить из того факта, что один строительный шнур состоит из $20 \cdot 21 = 420$ дюймов. Число 420 примечательно своим разложением на все простые множители от 2 до 7: $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Это разложение порождает 24 различные меры длины, полученные делением шнура на разные доли:

Шнур (10,47 м)	Дюйм (2,49 см)
Шнур : 2 = 210 дюймов (5,23 м)	Шнур : 210 = 2 дюйма (5,00 см)
Шнур : 3 = 140 дюймов (3,49 м)	Шнур : 140 = 3 дюйма (7,48 см, ладонь)
Шнур : 4 = 105 дюймов (2,61 м, сажень I)	Шнур : 105 = 4 дюйма (10,0 см)
Шнур : 5 = 84 дюйма (2,09 м, сажень II)	Шнур : 84 = 5 дюймов (12,5 см)
Шнур : 6 = 70 дюймов (1,75 м)	Шнур : 70 = 6 дюймов (15,0 см)
Шнур : 7 = 60 дюймов (1,50 м, двойной шаг)	Шнур : 60 = 7 дюймов (17,4 см, пядь)
Шнур : 10 = 42 дюйма (1,05 м)	Шнур : 42 = 10 дюймов (24,9 см)
Шнур : 12 = 35 дюймов (87,3 см)	Шнур : 35 = 12 дюймов (29,9 см, фут)
Шнур : 14 = 30 дюймов (74,8 см, шаг)	Шнур : 30 = 14 дюймов (34,9 см)
Шнур : 15 = 28 дюймов (69,8 см)	Шнур : 28 = 15 дюймов (37,4 см)
Шнур : 20 = 21 дюйм (52,4 см, локоть)	Шнур : 21 = 20 дюймов (49,9 см)

Подтверждение тому, что в древности действительно существовали системы мер, основанные на числах с большим количеством делителей, мы находим в *Законах* Платона. Приведём соответствующие отрывки целиком, особо подчеркнув ту фразу, которая имеет к нашей гипотезе самое прямое отношение. Платон считает, что число жителей идеального государства должно быть равно $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$; при этом после деления всего этого числа на 12 частей в каждой такой части оказывается $5040 : 12 = 420$ человек.

> «(737e–738a) Пусть будущих граждан будет пять тысяч сорок. Это — число подходящее, так земледельцы смогут отразить врага от своих наделов. На столько же частей будут разделены земля и жилища; человек и участок, полученный им по жребию, составят основу надела. Всё указанное число можно прежде всего разделить на две части, затем на три. По своей природе оно делится и на четыре, и на пять, и так вплоть до десяти. Что касается чисел, то всякий законодатель должен отдавать себе отчёт в том, какое число и какие свойства числа всего удобнее для любых государств. Мы признаём наиболее удобным то число, которое обладает наибольшим количеством последовательных делителей. Конечно, всякое число имеет свои разнообразные разделения; число же пять тысяч сорок имеет целых пятьдесят девять разделений, последовательных же — от единицы до десяти...
>
> (745bd) Надо разбить страну на двенадцать частей... Граждан также надо разделить на двенадцать частей. Вслед за тем эти двенадцать наделов надо поделить между двенадцатью богами и каждую определённую жребием часть посвятить тому или иному богу, назвав его именем. Такая часть будет носить название филы. В свою очередь и город надо разделить на двенадцать частей, точно так же как разделена остальная страна...
>
> (746de) Теперь нужно внимательно рассмотреть, какой смысл в этом принятом нами разделении на двенадцать частей. Ведь внутри этих двенадцати частей есть много подразделений, а также других, вытекающих из этих последних как их естественное порождение. Так мы дойдём и до числа пять тысяч сорок. Этими подразделениями будут: фратрии, демы, комы, боевые и маршевые отряды; будут и такие подразделения, как деньги, меры веса, сухих и жидких тел. Закон должен установить соразмерность и взаимную согласованность всего этого...
>
> (771ac) Нам надо вспомнить о числе пять тысяч сорок: на сколько удобных частей оно делилось — да и делится — как вообще, так и по филам? Каждая фила составляет, как мы положили, одну двенадцатую часть этого числа и образуется всего правильнее путём умножения числа двадцать один на двадцать. Общее наше число делится на двенадцать частей, на столько же делится число, составляющее филу. Следует вдуматься в то, что каждая такая часть — это священный дар бога: она соответствует месяцам и обращению вселенной».

Размеры и пропорции усыпальницы в пирамиде Хеопса

Найденное выше целочисленное отношение 47 : 21, служащее одним из рациональных приближений $\sqrt{5}$, встречается и в пропорциях некоторых других элементов египетских пирамид. К примеру, размеры усыпальницы фараона в пирамиде Хеопса составляют $10{,}47 \times 5{,}23 \times 5{,}86$ м, то есть $420 \times 210 \times 235$ дюймов. Если перейти к пятидюймовому модулю, размеры выразятся взаимно простыми числами $84 \times 42 \times 47$. Нетрудно видеть, что здесь задействовано уже знакомое нам приближение для $\sqrt{5}$, равное 47 : 21. Идеальный прообраз усыпальницы изображён на рис. 7. В структуру её пропорций включены два прямоугольника с отношением сторон 2 : 1, а также прямоугольный треугольник (3, 4, 5). Переход к целочисленной реализации этого прообраза производится заменой 1 на 21, а $\sqrt{5}$ — на 47.

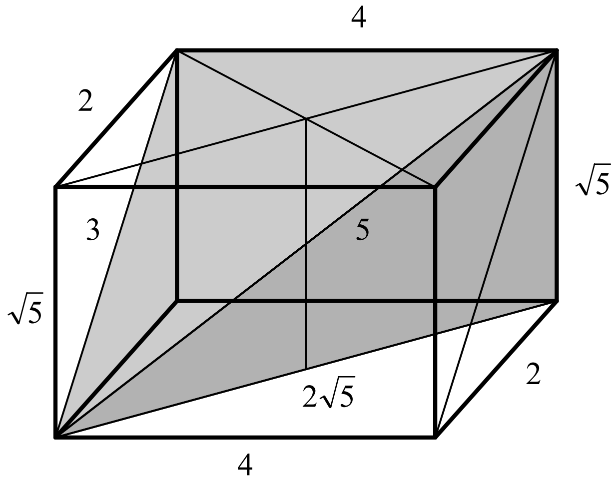

Рис. 7

Следует отметить мнение Ж.-Ф. Лауэра (1966, с. 221), согласно которому высота погребальной камеры могла отмериваться не по вертикали, но простой вставкой диагонального стержня в 15 локтей.

Пропорции красной пирамиды в Джахуре

Фараону Снофру, основателю VI династии, приписывается постройка не одной, а целых трёх пирамид. Сначала он достроил пирамиду в Мейдуме, превратив её из ступенчатой в настоящую. Затем он возвёл в Джахуре ещё две пирамиды: «красную» (названа так по цвету песчаника, из которого она сложена) и «ломаную» (названа по своей необычной форме). Эти две пирамиды уступают по своим размерам только возведённым позднее пирамидам Хеопса и Хефрена.

Угол наклона грани «красной» пирамиды примерно равен 43,5°. В книгах о пирамидах утверждается, что эта пирамида выстроена по отношению высоты к размаху, равному 20 : 21. Нетрудно понять, что из обмеров как таковых это отношение извлечено быть не может. Рассмотрим две пирамиды с отношениями 20 : 21 и 19 : 20. Приведя основания к общему кратному 20 · 21, получим две высоты 20 · 20 = 400 и 19 · 21 = 399, разнящиеся на единицу. Тем самым для уверенного различения пропорций этих двух пирамид высоту следует измерять с относительной погрешностью, в несколько раз меньшей 1/400. Стало быть, при высоте пирамиды в 100 метров эту высоту надо измерить с погрешностью менее 10 см. Понятно, что практически это требование невыполнимо.

И тем не менее утверждение о том, что «красная» пирамида выстроена по отношению 20 : 21, легко извлекается из дополнительных данных метрологии. Дело в том, что её высота приближённо равна 105 м, а размах основания — 110 м. Но 105 м — это конечно же удесятерённая длина строительного шнура в 10,47 м. А разность высоты и размаха в 5 м — это как раз половина длины шнура. Отсюда делается вывод, что «красная» пирамида задумывалась высотой в 20 полушнуров и размахом в 21 полушнур.

Прямоугольный треугольник с катетами 20 и 21 примечателен тем, что его гипотенуза имеет целочисленную длину 29. И можно предположить, что получение целочисленной длины всех трёх сторон формообразующего треугольника входило в замысел создателей «красной» пирамиды.

Пропорции ломаной пирамиды в Джахуре

Вторую пирамиду Снофру в Джахуре называют «ломаной» за её необычную форму. Грани «ломаной» пирамиды сначала круто поднимаются вверх под наклоном 7 : 5, но затем, поднявшись приблизительно на треть от возможной при этом наклоне высоты, они делают излом, становясь более пологими, и поднимаясь примерно под тем же наклоном, что и грани «красной» пирамиды.

Согласно общепринятой гипотезе, строители сначала планировали придать этой пирамиде правильную форму, а решение об уменьшении наклона граней в верхней части пирамиды было принято уже по ходу строительства — то ли из-за того, что пирамиду «не успевали достроить в срок», то ли потому, что во внутренних галереях и камерах пирамиды стали обнаруживаться трещины.

Впрочем, эта гипотеза игнорирует тот примечательный факт, что обе пирамиды в Джахуре, воздвигнутые Снофру, имеют одинаковую высоту в 105 метров = 10 шнуров, и одинаковый угол наклона граней в верхней части. Размах «красной» пирамиды составляет 110 метров = $10^1/_2$ шнуров, а размах «ломаной» пирамиды составляет 94 метра = 9 шнуров (рис. 8).

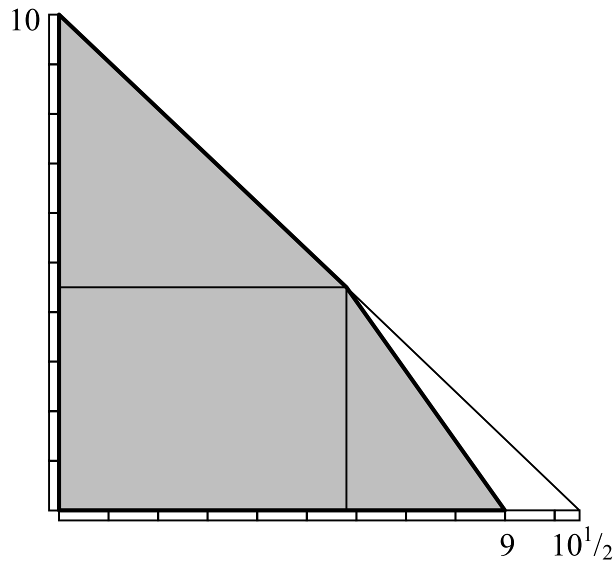

Рис. 8

Дальнейшая логика пропорций «ломаной» пирамиды не слишком понятна. Если уклон верхней части действительно составляет 20 : 21, то тогда на каждый локоть по вертикали расхождение граней «ломаной» и «красной» пирамид составляет $\frac{21}{20} - \frac{5}{7} = \frac{47}{140}$

локтя по горизонтали, и тем самым общее горизонтальное расхождение в полтора шнура = 30 локтей приобретается на высоте в $30\cdot\frac{140}{47}=89\frac{17}{47}$ локтя = 46,8 метра.

Другие справочные данные по «ломаной» пирамиде:

Высота излома = 49 метров = 93,6 локтя.

Угол наклона верхней грани = 43°22', tg α = 0,945 ≈ $\frac{17}{18}$.

Угол наклона нижней грани = 54°28', tg α = 1,400 ≈ $\frac{7}{5}$.

Подсчитаем высоту излома для уклона верхней части 17 : 18. Расхождение на локоть вертикали равно $\frac{18}{17}-\frac{5}{7}=\frac{41}{119}$ локтя, отсюда высота излома равна $30\cdot\frac{119}{41}=87\frac{3}{41}$ локтя = 45,6 метра. Как видно, данные обмера пирамиды не согласуются друг с другом. По-видимому, всё-таки легче померить высоту излома с точностью до метра, чем угол наклона верхней грани с точностью до нескольких минут. Так что попробуем по высоте излома установить угол наклона. (1) 49 метров = 93,6 локтя. (2) 30 : 93,6 = 0,3205. (3) 0,3205 + $\frac{5}{7}$ = 1,0348 ≈ $\frac{30}{29}$. Этот результат не отличается особой осмысленностью; по-видимому, точность данных обмера не позволяет вскрыть замысел пропорций «ломаной» пирамиды.

Математика пирамид и «пирамидология»

Комментарий, которым Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ (*Начала Евклида* 1950, т. 3, с. 298–299) сопровождает обсуждение приведённого выше свидетельства ГЕРОДОТА, показателен во многих отношениях, и я приведу его целиком.

> Так как время путешествия ГЕРОДОТА определяется 455–447 годами до н. э., то, во-первых, мы имеем точно датируемое и притом самое раннее документальное свидетельство, касающееся истории греческой математики и связи последней с Египтом. Во-вторых, мы имеем доказательство, что египтяне эпохи ГЕРОДОТА умели квадрировать площади прямолинейных фигур и что греки (один из них — ГЕРОДОТ) получили соответствующие познания из Египта. В-третьих, если рассматривать треугольник, гипотенузой которого является апофема боковой грани, вертикальным катетом — высота пирамиды, а горизонтальным — половина стороны основания, то легко видеть, что апофема так относится к высоте, как высота к половине основания, а в этом, между прочим, лежит зародыш принципа золотого сечения, или деления в крайнем и среднем отношении, которое также должно было быть известно египтянам около 450 г. до н. э.
>
> Говоря это, я никоим образом не хочу утверждать, как это делают некоторые буржуазные «пирамидологи», что Хеопсова пирамида построена по принципу золотого сечения. Если рассматривать все пирамиды в совокупности (а не только одну пирамиду ХЕОПСА), то открыть принцип их построения не так уж трудно, но он не будет иметь ничего общего с золотым сечением. Следует различать, что видели в пирамидах египтяне эпохи Древнего царства, и как их понимали египтяне во времена ГЕРОДОТА.

Схожей точки зрения придерживается в своей книге и Ж.-Ф. ЛАУЭР, отрицающий знание египтянами эпохи строительства пирамид не только золотого сечения, но даже теоремы Пифагора. Он пишет буквально следующее (ЛАУЭР 1966, с. 222–223):

> В эпоху сооружения больших пирамид геометрия не выходила из стадии интуитивного и утилитарного эмпиризма. Жрецы-зодчие, поставленные перед трудными техническими задачами, изыскивают всё более совершенные методы их разрешения; ум, всё ещё направленный на решение практических вопросов, не был способен отдаться чисто отвлечённым исследованиям... Хотя до настоящего времени и не найдено никаких египетских математических документов сокровенного характера, всё же, если верить грекам, известно, что египетские жрецы тщательно скрывали свои математические секреты... Вполне можно допустить, что египетские геометры действительно обладали обширными знаниями, тщательно собираемыми и секретно хранимыми в храмах, знаниями, полученными благодаря неусыпным наблюдениям в течение многих веков, отделяющих эпоху сооружения первых пирамид, т. е. около 2900 г. до н. э., от эпохи пробуждения математического мышления греков, т. е. начала VI в. до н. э. Что же касается, в частности, геометрии, то изучение таких сооружений, как знаменитая Великая пирамида, должно было занимать значительное место в исследованиях этих жрецов, и вполне понятно, что они сумели обнаружить в этих памятниках, без сомнения гораздо позже их сооружения, общие свойства, о которых не подозревали их строители.

Думается всё же, что уважаемые авторы были излишне категоричны в своих суждениях. По их представлениям, очевидно связанным с идеей прогрессивного накопления знаний, египтяне Древнего царства были подкованы в математике существенно слабее, чем их потомки времён Геродота. Поэтому строители пирамид руководствовались в своих проектах некими достаточно простыми принципами, не имеющими ничего общего с сознательно применяемой идеей золотого сечения; и только потом их потомки произвели обмер пирамиды Хеопса и отыскали в её конструкции воплощение этой идеи, которая исходно туда заложена не была. Концепция, на мой взгляд, более чем странная — ведь о математических знаниях эпохи Древнего царства у нас нет никаких иных свидетельств, кроме самих пирамид и других памятников древнеегипетской архитектуры. Почему же мы должны предполагать, что египтяне в V в. до н. э., то есть на закате своей цивилизации, имели более развитую математику, нежели строители пирамид в эпоху расцвета этой цивилизации? Не станем же мы настаивать на том, что несколько дошедших до нас однотипных математических папирусов эпохи владычества гиксосов (XVIII в. до н. э.) содержат в себе все основы египетской математики? Наши реконструкции, конечно, не должны противоречить этим сохранившимся письменным свидетельствам, — но они и не могут быть ими жёстко связаны, если у нас есть другие, неписьменные свидетельства, которые мы тоже можем пытаться «прочитать».

Если же изучение «математики пирамид» изгоняется за пределы истории математики, тем самым одно отдаётся на откуп пирамидологам, сочиняющим о размерах и пропорциях пирамид самые удивительные теории, которые кочуют из книги в книгу. Так среди пирамидологов принято считать, что в пропорциях пирамиды Хеопса заложено знание о числе π, вычисленном с высокой степенью точности А именно, отношение удвоенной стороны пирамиды к её высоте $\frac{2\cdot 330{,}4}{146{,}6} \approx 3{,}143$, что даёт для π три верных десятичных знака. Однако это совпадение является случайным, поскольку дробь $\frac{14}{11}$ является хорошим приближением и для квадратного корня из отношения золотого сечения, и для отношения площадей квадрата и вписанного в него круга. Но для последнего отношения эта дробь впервые была найдена Архимедом; сами же египтяне систематически пользовались менее точным приближением $\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}$, зафиксированном как в Московском папирусе, так и в папирусе Ринда (различные реконструкции метода, которым было получено это значение, см. Боев 1950, Раик 1960, Вайман 1960, Engels 1972, Gerdes 1985).

Не выдерживает серьёзной критики и другая теория, согласно которой угол наклона грани пирамид выбирался равным $\frac{4}{7}$ от прямого угла. Приём построения вписанного в круг семиугольника первым разработал всё тот же Архимед. использовавший метод вставки, так как данное построение неосуществимо с помощью циркуля и линейки. Если мы захотим рассчитать пропорции соответствующего треугольника, это приведёт нас к кубическому уравнению $8x^3 + 4x^2 = 4x + 1$, наибольший корень которого представляет горизонтальный катет формообразующего прямоугольного треугольника, гипотенуза которого принята за единицу. Этот наибольший корень с высокой точностью равен $\frac{5}{8}$. Таким образом, если гипотенузу положить равной 8, то катет будет равен 5 — это и есть пропорция пирамиды Микерина. Всё замечательно, за исключением одного обстоятельства: предполагать, что древние египтяне (а) владели техникой геометрических построений на уровне Архимеда и (б) были знакомы с применением кубических уравнений для решения геометрических задач, я решительно не могу.

Теория Робинса и Шюта как попытка избавиться от золотого сечения

Поскольку гипотеза о том, что строители пирамид обладали достаточно развитой математикой, некоторым критически настроенным историкам математики представлялась неприемлемой, возникла необходимость в иных объяснениях пропорций пирамид. Такое объяснение было предложено Робинсом и Шютом (Robins & Shute 1985). Исходя из анализа ряда задач папируса Ринда, эти авторы утверждают, что мерой отклонения поверхности от вертикали в Древнем Египте служил уклон 1 : 7, когда на один локоть падения по вертикали происходит отклонение на одну ладонь по горизонтали; такая единица отклонения называлась «секед».

Далее утверждается, что отношение высоты пирамиды Хеопса к её размаху, равное 14 : 11, никакого отношения к золотому сечению не имеет. По мнению авторов, дело здесь всего лишь в том, что при строительстве пирамид было принято устанавливать уклон в $5\frac{1}{2}$ секеда (рис. 8), в результате чего и получалось отношение 14 : 11. А затем в строительстве произошёл переход к норме уклона в $5\frac{1}{4}$ секеда, которой соответствует отношение 4 : 3.

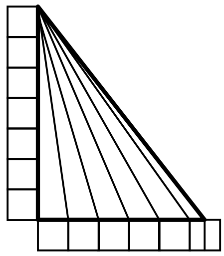

Рис. 8

На мой взгляд, данную теорию иначе как бессодержательной назвать нельзя. Ведь числам $5\frac{1}{2}$ и $5\frac{1}{4}$ она не даёт никакого объяснения; говорится только, что «так было принято». Но почему тогда не сказать просто, что уклон пирамиды Хеопса задавался отношением 14 : 11, поскольку так было принято? И как она объясняет случай пирамиды Микерина, где имеет место отклонение в $5\frac{3}{5}$ секеда? Не объясняет эта теория и целочисленных пропорций погребальной камеры пирамиды Хеопса, равно как и многих других элементов пирамид.

Так что становится ясным, что сама эта теория была придумана с одной целью — дискредитировать всякие разговоры о том, что уровень математики в Древнем Египте мог быть гораздо выше того, как он зафиксирован в нескольких дошедших до нас папирусах, и утвердить мысль о том, что «the Egyptians, although renowned in the ancient world for their cleverness, were an essentially practical race, strongly religious indeed, but not particularly given to abstract thought» (p. 119).

Думается однако, что был прав М. Я. Выгодский, когда он утверждал, что «вопрос о наличии [у египтян] более тонких методов остаётся совершенно открытым — не более, и никакого противоречия с утверждением, что египтяне знали и более тонкие вещи, не получается» (Выгодский 1967, с. 74).

Библиография

Бобынин В. В. *Математика древних египтян (по папирусу Ринда).* М., 1882.

Бобынин В. В. Древняя египетская математика в эпоху владычества гиксов. *Журнал Министерства народного просвещения*. 1909, **23**, с. 290–338; **24**, с. 1–50.

Боев Г. П. Вычисление поверхностей и объёмов тел вращения у древних египтян. *Вестник древней истории*, 1950, №3, с. 196–201.

Вайман А. А. Длина окружности и площадь круга в древнеегипетской математике. В кн.: *Древний Египет*. М.: ИВЛ, 1960, с. 97–102.

Владимиров В. Н. *Пропорции в древнеегипетской архитектуре*. М.: Изд-во Всесоюзной академии архитектуры, 1944.

Выгодский М. Я. *Арифметика и алгебра в Древнем мире.* М.: Наука, 1967.

Лауэр Ж.-Ф. *Загадки египетских пирамид*. М.: Наука, 1966.

Начала Евклида. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. В 3 т. М.: ГТТИ, 1949–50.

РАИК А. Е. К истории возникновения замечательного египетского приближения к числу π. *Уч. зап. Мордовского ун-та*, **8**, 1960, с. 95–99.

РОДИН А. В. *Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля*. М.: Наука, 2003.

BECKER O. Über die Proportionen der Ägyptischen Pyramiden. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 1961, **3**; 1962, **4**; 1963, **5**; 1964, **6**.

BORCHARDT L. *Längen und Richtungen der vier Grundkanten der grossen Pyramide bei Gise*. Berlin, 1926.

BRUINS E. M. Rationalitatsfragen bei Pyramiden. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 1962, **4**.

BUTLER H. R. *Egyptian pyramid geometry*. Mississauga, 1998.

CHASE A. B., BULL L., MANNING H. P. *The Rhind mathematical papyrus*. Oberlin (Ohio): MAA, 1929.

EDWARDS I. E. S. *The pyramids of Egypt*. Baltimore: Penguin Books, 1947.

ENGELS H. Quadrature of the circle in Ancient Egypt. *Historia Mathematica*, **4**, 1977, p. 137–140.

GERDES P. Three alternate methods of obtaining the Ancient Egyptian formula for the area of a circle. *Historia Mathematica*, **12**, 1985, p. 261–268.

GILLINGS R. J. *Mathematics in the time of the pharaohs*. Cambridge (Mass): MIT Press, 1972.

HERZ-FISCHLER R. *The shape of the Great Pyramid*. Waterloo (Ontario): Wilfrid Laurier Univ. Press, 2000.

LEHNER M. *The complete pyramids*. London: Thames & Hudson, 1997.

PEET T. E. *The Rind mathematical papyrus*. London: Hodder & Stoughton, 1923.

PETRIE W. M. F. *The Pyramids and Temples of Gizeh*. London: Field & Tuer, 1883.

ROBINS G., SHUTE C. C. D. Mathematical bases of Ancient Egyptian architecture and graphic art. *Historia Mathematica*, **12**, 1985, p. 107–122.

ROBINS G., SHUTE C. C. D. *The Rhind mathematical papyrus: an Ancient Egyptian text*. NY, Dover, 1987.

ROBINS G., SHUTE C. C. D. The 14 to 11 proportion in Egyptian architecture. *Discussions in Egyptology*, **16**, 1990, p. 75–80.

ROSSI C. *Architecture and mathematics in Ancient Egypt*. Cambridge (UK): Cambridge Univ. Press, 2004.

STRUVE W. W. Mathematischer Papyrus des Staatlischen Museums der Schönen Künste in Moskau. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, **A1**, 1930.