Японская храмовая геометрия

А. И. Щетников

算額

В XVII веке в Японии возникла сильная математическая школа, связанная с многовековыми традициями китайской математики и не имевшая контактов с современной математикой Запада. Крупнейший представитель этой школы Секи Кова (1642–1708), самурай по происхождению, в детстве — ребёнок необычайных способностей, в конце жизни — высокопоставленный чиновник при дворе сёгуна, ввёл в японскую математику новую систему символических обозначений, в одно время с Ньютоном изобрёл метод приближённого решения уравнений высоких степеней, развил метод определителей до Лейбница, изучал «числа Бернулли» до Якоба Бернулли, придумал новый метод приближённого вычисления площади круга и сделал ряд других крупных открытий.

Надо заметить, что математика XVII века и в Японии, и в Европе была весьма своеобразным интеллектуальным занятием, сохранившим в себе нечто от цеховых традиций средневековья. Обычной была ситуация, когда отдельные мастера, придумав какую-нибудь сложную задачу, бросали публичный вызов своим собратьям по цеху, предлагая им найти решение и показать своё мастерство. Методы решения задач держались в тайне от соперников, — точно так же, как любой цеховой мастер оберегал тайны своего профессионального мастерства. Пьер Ферма унёс с собой многие тайны своего искусства; и многочисленные открытия Ньютона ждали своей публикации не один десяток лет.

Однако к концу XVII века занятия математическими науками в Европе стали приобретать принципиально иную форму. «Вызовы на задачу» сменились публикациями в научных журналах. Теперь учёный, развивший новый метод, не хранил его в секрете как своё «тайное оружие», но сразу же раскрывал свои результаты перед коллегами в статье, утверждавшей его приоритет. Так европейская математика из интеллектуального досуга одарённых любителей науки стала постепенно превращаться в фабрику по систематическому и целенаправленному производству новых знаний, и на смену учёным-любителям пришли профессионалы, группировавшиеся в XVIII веке вокруг нескольких крупных академий, а в XIX веке — вокруг многочисленных университетов.

Однако в Японии переход к новым формам организации научной жизни в это же самое время не произошёл. Тогда как страны Запада активно шли вперёд по новому пути развития, самурайская Япония в эпоху Эдо, продолжавшуюся с 1603 по 1867 г., изолировалась от западного мира, сохраняя средневековый жизненный уклад. Возможно, именно поэтому достижения Секи Ковы не получили дальнейшего развития, и японские математики стали вновь показывать результаты мирового уровня только в 20 веке, включившись в общемировой научный процесс.

Однако неверно будет сказать, что в эпоху Эдо математики в Японии не было. Она была, но её содержание и формы существования были столь необычны с западной точки зрения, что европейские историки науки долгое время её вообще не замечали. И всё же стараниями японских исследователей постепенно была осознана самобытность «национальной» математики с её особым жизненным укладом, который до конца 19 века был в большей степени похож на мир игроков в шахматы, нежели на мир академической науки. Было в этой старой японской математике и что-то такое, что роднило её с японским искусством — живописью, поэзией, каллиграфией, театром, чайными церемониями, разбиением садов, изготовлением одежды и предметов быта.

Одним из плодов этого математического искусства стали так называемые *сангаку*, «математические таблички». Любители математики из разных социальных классов — самураи, торговцы, ремесленники, крестьяне — открывали и доказывали разнообразные геометрические теоремы, от простых до очень сложных. Чертежи к теоремам вырезались на деревянных досках и красиво раскрашивались. Не все доски посвящены геометрическим задачам: на некоторых решались диофантовы уравнения или отыскивались объёмы криволинейных тел. На большинстве досок приводился только результат, а доказательство отсутствовало. Готовые доски вывешивались над входом в синтоистское святилище или буддистский храм в качестве приношения богам, а заодно — и вызова коллегам. (Здесь можно вспомнить о том, как шестнадцатилетний Блез Паскаль, получив свои замечательные результаты по проективной геометрии, издал афишку с их изложением и расклеивал её на улицах Парижа.)

Как пишут в предисловии к своей книге собиратели и исследователи задач японской храмовой геометрии Хидетоши Фукагава и Дэниел Педое, «чувство формы и восприятие природной красоты всегда отличали жителей Японии, так что не удивительно, что геометрия, притягательная своей красотой и неочевидностью задач и теорем, стала для практикующих это искусство людей не только развлечением, но и подходящим предметом для приношений богам».

Японцы считают, что безымянных синтоистских божеств *ками* — восемь миллионов, и все они тайно странствуют по земле. Когда человеку открывается что-то прекрасное, это означает, что рядом с ним прошло незримое божество. (Приношение досок с доказанными теоремами в дар божеству напоминает известный рассказ о Пифагоре, принёсшим при открытии своей теоремы обильные жертвы богам.)

Многие из теорем сангаку по своим темам и стилю заметно отличаются от теорем, известных в геометрии Запада, а некоторые из них повторяют достижения европейской математики Нового времени. Очень много задач посвящено эллипсам и вписанным в ним окружностям, что связано с тем, что в Японии эллипс мыслился не как сечение конуса, что привычно для западной геометрии, но как сечение цилиндра. Японскими геометрами были открыты и доказаны многочисленные теоремы о цепях Штейнера, которые в европейской геометрии доказывались с помощью метода инверсии. Характерным было также использование пространственных образов при доказательстве планиметрических теорем. В частности, возможно, что в качестве аналога метода инверсии японские математики использовали стереографическую проекцию.

Вообще же метод открытия геометрических теорем, практиковавшийся японскими геометрами, основывался на интенсивной и продолжительной концентрации на рассматриваемом чертеже. Когда одного геометра спросили, как он получил свои замечательные теоремы об эллипсах, он ответил, что не размышлял ни над чем, кроме эллипсов, в течение последних десяти лет! Интересно, что когда японские геометры получили в свои руки китайский перевод «Начал» Евклида, они были очень сильно удивлены. «Зачем, — сказали они, — доказывать такие очевидные факты, когда есть ещё столько красивых и сложных геометрических теорем?»

В качестве примера типичной теоремы храмовой геометрии рассмотрим одну задачу, связанную с эллипсом и вписанными в него окружностями. Решение этой задачи методами высшей геометрии требует владения понятиями второй производной и кривизны кривой; однако она может быть решена и элементарными средствами.

Прежде чем сформулировать саму задачу, введём понятие об окружности кривизны эллипса в конечной точке его большой оси. Рассмотрим две окружности, касающихся друг друга внутренним образом. А затем начнём сжимать большую окружность по направлению, перпендикулярному к общей оси двух окружностей, превращая её в эллипс (рис. 1). До какого-то предельного момента эллипс будет охватывать меньшую окружность снаружи; но после этого момента часть дуги эллипса будет лежать внутри меньшей окружности. Эти два возможных состояния разделены пограничным эллипсом, выделенным на чертеже жирной линией. А малая окружность, всё ещё лежащая внутри пограничного эллипса, называется окружностью его кривизны в концевой точке большой оси.

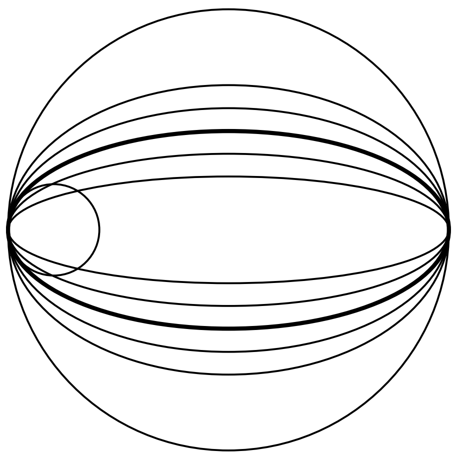

Рис. 1

Итак, пусть имеется эллипс, в который вписана цепь касания из n окружностей таким образом, что крайние окружности цепи являются окружностями кривизны эллипса в концах его большой оси (рис. 2). Требуется найти соотношение между осями эллипса и диаметрами окружностей.

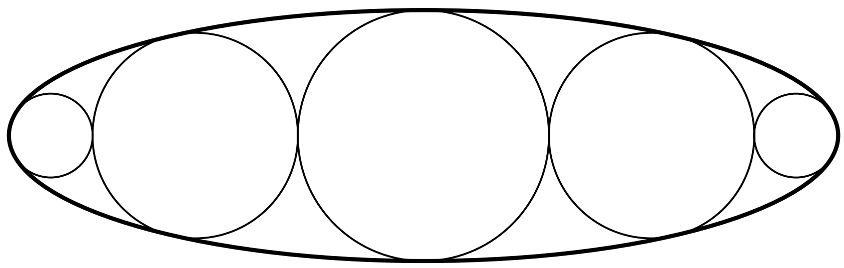

Рис. 2

Решение задачи основано на представлении об эллипсе как о косом сечении цилиндрической трубы. Рассмотрим цилиндр с вписанными в него шарами, проницающими друг друга так, как показано на рис. 3, и рассечём этот цилиндр и шары косым плоским сечением, проекция которого выделена на чертеже жирной линией. Дальнейшее очевидно из чертежа. А именно, если на малой оси эллипса как на диаметре построить окружность и вписать в ней правильный многоугольник с $2n$ сторонами, то диаметры концевых окружностей цепи будут равны стороне этого многоугольника, диаметры следующих по порядку окружностей будут равны диагоналям, соединяющим вершины многоугольника, отделённые друг от друга 3 сторонами, 5 сторонами и т. д.

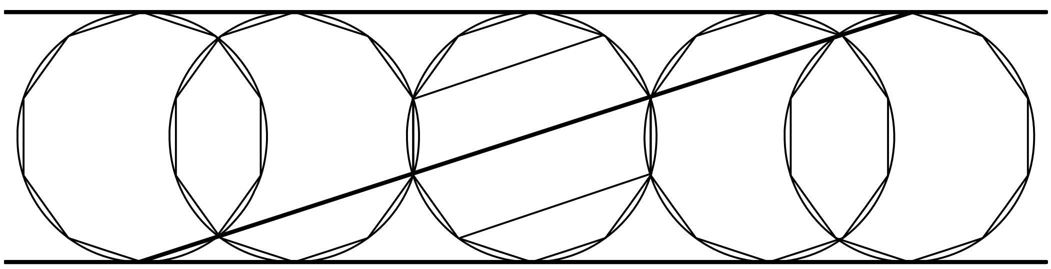

Рис. 3

Некоторые задачи сангаку

1. Окружности $O_1(\mathrm{r}_1)$ и $O_2(r_2)$ касаются друг друга и прямой m. Окружность $O_3(r_3)$ касается $O_1(\mathrm{r}_1)$, $O_2(r_2)$ и m (рис 4). Докажите, что $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$.

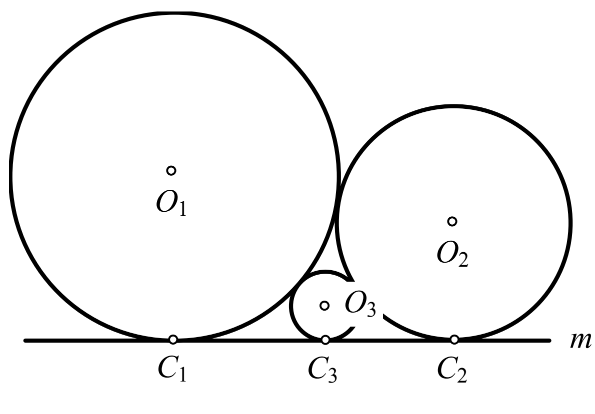

Рис. 4

ЛЕММА. Пусть две окружности $O_1(\mathrm{r}_1)$ и $O_2(r_2)$ касаются друг друга в точке A и касаются прямой m в точках B и C. При этом будет $BC = 2\sqrt{r_1 r_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка A является точкой касания, поэтому она лежит на прямой O_1O_2. Проведём диаметры BD и CE; они будут параллельными как перпендикулярные к одной прямой BC. Соединим точку A с концами отрезков BD и CE. Треугольники DO_1A и AO_2C — равнобедренные. $\angle DO_1A = \angle AO_2C$ как внутренние накрестлежащие. Отсюда $\angle O_1AD = \angle O_2AC$, и точки D, A, C лежат на одной прямой. Аналогично и точки B, A, E лежат на одной прямой. $\angle ACB = \angle AEC$, так как в сумме с $\angle ACE$ оба эти угла дают 90°. Поэтому прямоугольные треугольники DCB и BEC подобны. Из их подобия имеем $2r_1 : x = x : 2r_2$, откуда $x = 2\sqrt{r_1 r_2}$.

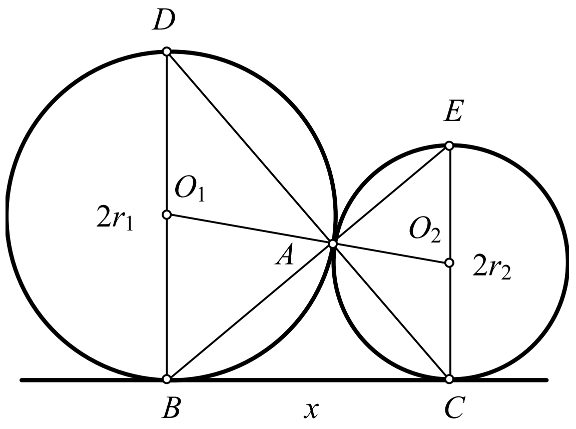

Рис. 5

РЕШЕНИЕ. Поскольку $C_1C_2 = C_1C_3 + C_3C_2$, в силу леммы $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$. Разделив все слагаемые на $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$, получим $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$.

2. Параллельные прямые m_2 и m_3 касаются окружности $O_1(r_1)$. Окружности $O_2(r_2)$ и $O_3(r_3)$ касаются друг друга и окружности $O_1(r_1)$, при этом $O_2(r_2)$ касается m_1, а $O_3(r_3)$ касается m_3. Докажите, что $r_1^2 = 4r_2 r_3$.

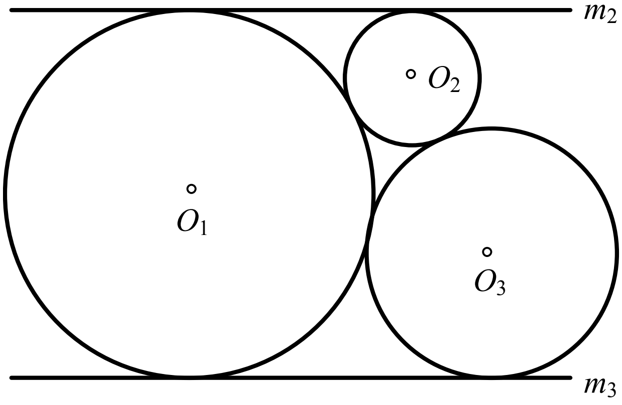

Рис. 6

КОММЕНТАРИЙ. С помощью теоремы Пифагора доказать это соотношение не слишком сложно. Но попробуйте придумать решение, опирающееся не на теорему Пифагора, а на соображения, связанные с подобием, как это было сделано в предыдущей задаче.

3. Во вписанном в окружность четырёхугольнике проведены диагонали, двояко рассекающие этот четырёхугольник на два треугольника. В каждый из четырёх получившихся треугольников вписана окружность. Докажите, что центры вписанных окружностей являются вершинами прямоугольника.

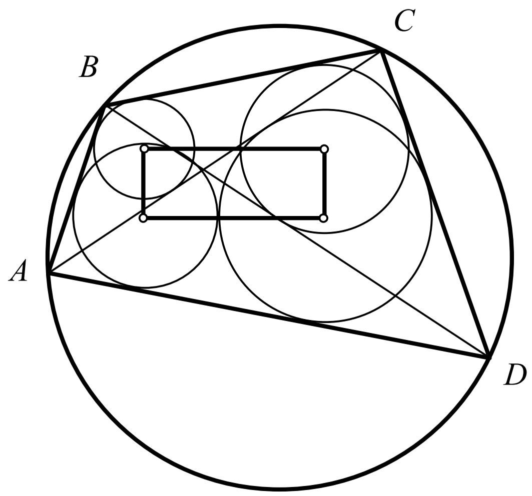

Рис. 7

ЛЕММА 1. Дуги, высекаемые на окружности парой вертикальных углов между двумя пересекающимися хордами, в сумме равны дуге, на которую опирается вписанный угол, равный углу между этими хордами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть хорды AB и CD, пересекающиеся в точке P, высекают на окружности дуги AD и CB. Проведём хорду CE, параллельную AB, здесь $\angle ECD = \angle APD$. Дуга AE равна дуге CB, поэтому дуга DE, на которую опирается вписанный угол ECD, равна сумме дуг AD и CB.

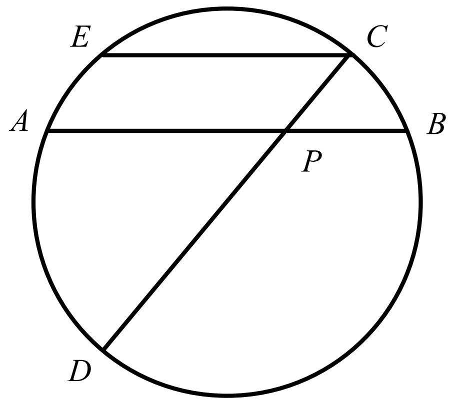

Рис. 8

ЛЕММА 2. Если сумма высекаемых двумя пересекающимися хордами противоположных дуг равна половине обвода окружности, то эти хорды перпендикулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По ЛЕММЕ 1 угол между данными хордами будет равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, равную половине окружности. Но такой вписанный угол является прямым.

РЕШЕНИЕ. Разделим дуги AB, BC, CD, DA точками E, F, G, H пополам. Поскольку дуги EF и HG в сумме равны дугам EH и FG, в силу ЛЕММЫ 2 хорды EG и HF перпендикулярны. Далее, центр O_1 вписанной окружности треугольника ABC лежит на пересечении биссектрис AF и BQ; центр O_2 вписанной окружности треугольника BCD лежит на пересечении биссектрис DF и CP (рис. 8).

Докажем, что отрезок O_1O_2 параллелен хорде EG. Вписанный угол FBP опирается на дугу $\frown FP = \frown FC + \frown CP$. Вертикальные углы FO_1B и PO_1A опираются на дуги FB и PA. В силу ЛЕММЫ 1 угол FO_1B равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, равную $\frown FB + \frown PA$. Но $\frown FB = \frown FC$ по построению, $\frown CP = \frown PA$, поскольку BP — биссектриса вписанного угла ABC. Поэтому $\angle FBO_1 = \angle FO_1B$, а тем самым треугольник FBO_1 является равнобедренным, и $FB = FO_1$. Аналогично доказывается равенство отрезков $FC = FO_2$. Но $FB = FC$, отсюда $FO_1 = FO_2$. Но поскольку $\angle AFH = \angle DFH$ как опирающиеся на равные дуги AH и HD, хорда FH является биссектрисой угла AFD. Тем самым она является высотой равнобедренного треугольника FO_1O_2. И поскольку хорды FH и EG перпендикулярны, отрезок O_1O_2 параллелен хорде EG.

Аналогичным образом доказывается, что остальные стороны четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ параллельны одной из двух перпендикулярных хорд EG и FH. Тем самым $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник.

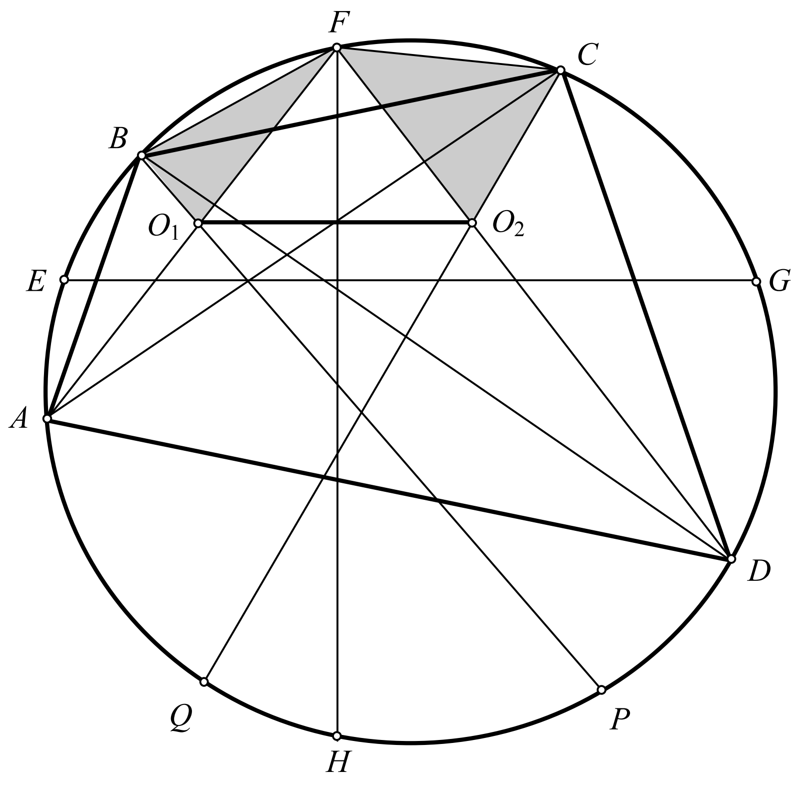

Рис. 8

4. Вписанный в окружность многоугольник произвольным образом разбивается диагоналями на треугольники, и в каждый треугольник вписывается окружность. Докажите, что сумма радиусов всех вписанных окружностей будет одной и той же при любом порядке триангуляции (рис. 9).

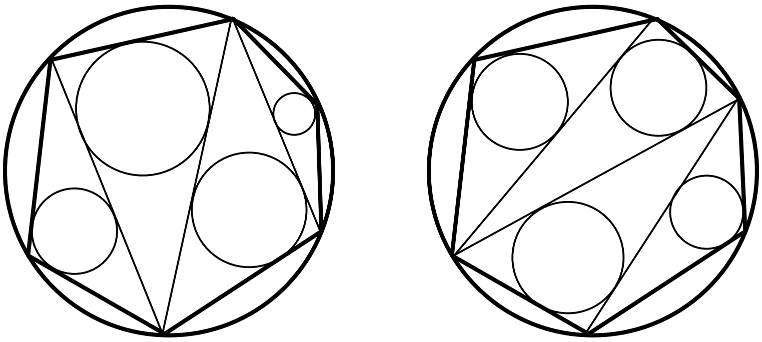

Рис. 9

КОММЕНТАРИЙ. Если доказать это утверждение для четырёхугольника, его несложно будут обобщить и на случай многоугольника с произвольным числом углов. А доказательство для четырёхугольника можно получить как следствие предыдущей задачи.

Литература

FUKAGAWA H., PEDOE D. *Japanese Temple Geometry Problems*. Winnipeg: Charles Babbage Research Foundation, 1989.

FUKAGAWA H., RIGBY J. F. *Traditional Japanese Mathematics Problems from the 18th and 19th Centuries.* Singapore: Science Culture Technology Press, 2002.

ROTHMAN T. Japanese Temple Geometry. *Scientific American*, **278**, # 5 1998, p. 85–91.