Развитие учения о музыкальной гармонии от Пифагора до Архита

А. И. Щетников

1. Пифагор как открыватель числовой гармонии

Все дошедшие до нашего времени сведения о возникновении в древней Греции математического учения о музыкальной гармонии определённо связывают это возникновение с именем Пифагора Самосского (570–497 до н. э.). Достижения Пифагора в этой области кратко перечислены в следующем отрывке из Ксенократа, дошедшем до нас в составленном Порфирием *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* (30_{2-6}):

> Пифагор, как говорит Ксенократ, открыл и то, что в музыке интервалы (διαστήματα) неотрывны от числа, так как они возникают от соотнесения количества с количеством. Он исследовал, в результате чего возникают созвучные (σύμφωνα) и разнозвучные (διάφωνα) интервалы и всё гармоничное и негармоничное.

Дальнейшее развитие учения о числовой природе гармонии стало делом других членов пифагорейского сообщества, среди которых в разное время выделялись Гиппас из Метапонта (начало V в.), Филолай из Кротона (ок. 450 – ок. 390) и Архит из Тарента (ок. 430 – 350). Их стараниями была построена математическая теория гармонии, ставшая, наряду с арифметикой, геометрией и теоретической астрономией, одной из четырёх пифагорейских математических дисциплин. О содержании, характере и цели этого учения Платон в *Филебе* (17се) говорит устами Сократа так:

> После того, милейший, как ты узнаешь, каково число интервалов между высокими и низкими звуками, каковы границы этих интервалов, сколько они образуют систем (предшественники наши, открывшие эти системы, завещали нам, своим потомкам, называть их гармониями и прилагать имена ритма и меры к другим таким состояниям, присущим движениям тела, если измерять их числами; они повелели нам, далее, рассматривать таким же образом вообще всякое единство и множество), — после того как ты узнаешь всё это, ты станешь мудрым, а когда постигнешь всякое другое единство, рассматривая его таким же способом, то сделаешься сведущим и относительно него.

Настоящий обзор, посвящённый анализу пифагорейской гармонии в историческом и теоретическом аспектах, охватывает приблизительно тот же материал, что и актуальная по сей день статья Б. Л. Ван дер Вардена (Waerden 1943); ссылки на эту основополагающую работу ниже даются по русскому переводу (1959). Обзор основывается в основном на материале первоисточников и немногочисленных статей по данной теме, опубликованных на русском языке. Большая часть иностранных статей, указанных в библиографии, была мне, к сожалению, не доступна.

Следует заметить также, что настоящая работа имеет своей целью рассмотреть пифагорейское учение о гармонии как первую главу в истории математического естествознания, касаясь смежных областей истории философии и истории музыковедения лишь вскользь. Впрочем, автор выражает надежду, что его изыскания будут интересны и полезны также и специалистам в этих дисциплинах, столь отличных по своему предмету и методам от истории точных наук.

2. Феноменология гармонии: «то, что до чисел»

1. Исходная постановка вопроса. Ключевая проблема, связанная с возникновением числового учения о гармонии, сосредотачивается в следующем вопросе: в силу каких причин у пифагорейцев возникла сама мысль объяснять структуру гармонии с помощью числовых отношений, если в чувственном восприятии присутствуют звуки и созвучия, но никаких чисел и их отношений, всецело относящихся к сфере умозрительного и неявного, в нём нет?

Чтобы ответить на этот вопрос, следует предварительно рассмотреть те знания о музыкальной гармонии, которые могут быть приобретены непосредственным наблюдением как за искусством исполнения музыки, так и за практикой изготовления и настройки музыкальных инструментов. Прояснению этой феноменологии и попутному обсуждению некоторых терминов древнегреческой музыки посвящён данный раздел статьи.

2. Высота звука как неопределённое и предел. Античные источники сообщают, что ключевую роль в математическом осмыслении сущего у пифагорейцев играло парное начало «неопределённое и предел» (*ἄπειρον καὶ πέρας*). Это учение было обнародовано Филолаем в книгах *О природе* (44 B1 DK), но возможно, что оно восходит к более ранним временам существования школы.

Исходный опытный факт, с которого начинается построение учения о гармонии, состоит в следующем: музыкальные звуки бывают высокими и низкими, и от высокого звука к низкому возможен непрерывный переход: меняя натяжение струны, мы меняем высоту звука, делая его неопределённо выше или неопределённо ниже. (Низкий звук греки называли *βαρύς* = «тяжёлый», а высокий звук — *ὀξύς* = «острый».)

Музыкальный звук фиксированной высоты в древнегреческой музыкальной теории назывался голосом (*φθόγγος*); в грамматике этим же словом называется гласный звук. Обычное для античной музыкальной теории определение голоса приводит Аристоксен в *Элементах гармоники* (20_{16}): «Выпадение звука при одном натяжении есть голос (*φωνῆς πτῶσις ἐπὶ μίαν τάσιν ὁ φθόγγος ἐστί*)». Многие последующие авторы воспроизводят это определение в несколько ином виде: «Голос есть выпадение мелодического звука под одним натяжением (*φθόγγος ἐστὶν ἐμμελοῦς φωνῆς πτῶσις ὑπὸ μίαν τάσιν*)».[1] Порфирий в *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* (86_7) приводит ещё одно определение, которое он, в отличие от определения Аристоксена, называет пифагорейским: «Голос есть шум, производимый под одним натяжением (*φθόγγος ἐστὶ ψόφος κατὰ μίαν τάσιν ἐκφερόμενος*)».

[1] См. Порфирий, *Комментарий к «Гармонике» Птолемея* (86_9); Секст Эмпирик, *Против учёных* (VI, 42_1); Клеонид, *Введение в гармонику* (1_7); аноним Беллермана, *О музыке* (21_6).

Взяв две натянутые струны, одну из них можно подстроить к другой так, чтобы они издавали один и тот же голос, звучали в унисон (этот термин — латинский, а по-гречески слитное звучание голосов одинаковой высоты называется *ὁμοφωνία*, «однозвучие»).

3. Голос как неделимое. Согласно экспериментальным данным современной акустики, мы воспринимаем два музыкальных звука сливающимися в пределах некоторого узкого, но всё-таки имеющего конечную ширину высотного интервала. Пифагорейская теория, напротив, исходила из теоретического предположения о том, что звучащий голос является своего рода «точкой» на высотной шкале. Когда струна пережимается в двух разных точках, звучащие голоса будут разными, сколь бы близко эти две точки не находились друг к другу. И если наше ухо не способно улавливать различие этих голосов, то это ещё не значит, что они будут неразличимыми для «теоретического слуха».

По сообщению ДИОГЕНА ЛАЭРЦИЯ (III, 84_9), ПЛАТОН определял гармонику как науку, занимающейся «умозрением голосов»; он же (III, 107_8) называл не имеющим частей (*ἀμερῆ*) «то, что не поддаётся разделению и ни из чего не состоит, каковы единица, точка или голос». НИКОМАХ ГЕРАЗСКИЙ в *Наставлении по гармонике* (12, 1_6) говорит, что «голос есть атом звука, нечто вроде слуховой монады (*φθόγγος ἐστὶ φωνὴ ἄτομος, οἷον μονὰς κατ᾽ ἀκοήν*)».

Следует заметить, что представление о высотной неделимости голоса установилось в античной музыкальной теории не сразу. Во всяком случае АРИСТОКСЕН в *Элементах гармоники* (7_{20}) приводит утверждение ЛАСА ГЕРМИОНСКОГО о том, что «у воспринимаемого чувствами есть ширина (*πλάτος*)».

4. Интервал как отрезок звуковысотного пространства. Два голоса различной высоты заключают между собой некоторый интервал. АРИСТОКСЕН (20_{20}) приводит следующее определение интервала: «Интервал есть то, что ограничено двумя голосами, имеющими различное натяжение».

5. Октава как совпадение различного. Среди всех интервалов особо выделяется интервал *октавы*. Петь в октаву — в каком-то смысле то же самое, что петь в унисон. Голоса при таком пении ведут одну мелодию параллельно друг другу и всё время сливаются в едином звучании. Следует заметить, что древнегреческая музыка не знала никакого другого многоголосного пения, кроме пения в октаву, когда одну и ту же мелодию пели мальчики и мужчины. Такое пение называлось *магадидой*, и о участвовавших в нём голосах говорили как о противозвучаших (*ἀντίφωνοι*).

Чтобы настроить две струны в октаву, надо добиться того, чтобы попадание было точным, «не выше и не ниже» — так же как и с настройкой в унисон. Как говорит об этом и других аналогичных случаях СЕКСТ ЭМПИРИК (*Против учёных*, X, 268), «созвучное находится между высоким и низким». Когда настройка становится точной, голоса октавы сливаются, воспринимаются на слух как один голос. По этой причине об октаве говорят как о *созвучии* (*συμφωνία*, а на латыни — консонанс).

Проверить качество настройки октавы можно ещё одним способом. А именно, можно ущипнуть верхнюю струну лиры и затем остановить её; если настройка произведена правильно, то нижняя струна продолжит звучать голосом высокой струны. Это явление называют *отзвуком* (ἦχος, ἀντήχησις, а на латыни — резонанс).

6. Квинта, кварта и аддитивная структура гармонии. Помимо интервала октавы, имеется ещё один консонансный интервал — *квинта*. Квинта меньше октавы, и возможно, что именно в этом заключается причина её меньшего совершенства: звучащие в квинту голоса сливаются, но не столь сильно, как они сливались в октаве. И в пении антифона они тоже не образуют, и не резонируют друг с другом.

Пусть три голоса таковы, что крайние различаются на октаву, нижний и средний — на квинту. Крайние голоса сливаются друг с другом, средний голос тоже сливается с нижним, но не в такой степени. Но тем самым средний и верхний голоса в какой-то мере тоже сливаются между собой! Этот новый консонансный интервал называется *квартой*; он меньше квинты и характеризуется ещё меньшей степенью слияния голосов.

Последний опытный факт, на котором основывается учение о гармонии, состоит в том, что результат сложения интервалов не зависит от порядка слагаемых. Это означает, что если средний голос внутри октавы образует кварту с нижним голосом, то он же образует кварту с верхним голосом.

Именно эта структура трёх созвучий, схематически изображённая на рис. 1, и получила у пифагорейцев имя *гармонии*. Голоса в гармонии образуют замкнутую структуру, к которой, в некотором смысле, уже нечего добавить.

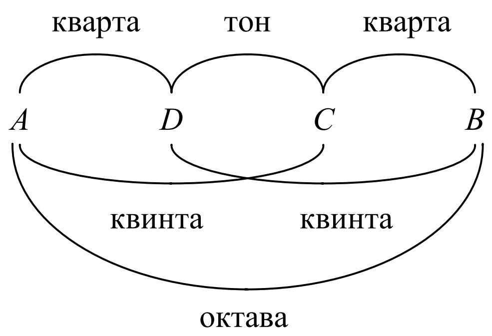

Рис. 1

Внутренние пределы C и D заключают между собой ещё один интервал. Этот интервал, называемый *основным тоном*, меньше кварты. На слух основной тон в качестве консонанса уже не воспринимается.

7. Греческие названия созвучий. Греческая музыка знает много различных систем, по которым настраиваются восемь струн лиры. Однако в любой системе интервал от первой ноты до восьмой составляет октаву. Это название латинское, а по-гречески октава называется διὰ πασῶν, «через все».

Интервал от первой ноты до четвёртой всегда составляет кварту (διὰ τεσσάρων, «через четыре»), от первой ноты до пятой — квинту (διὰ πέντε, «через пять»). Ноты от первой до четвёртой составляют первый тетрахорд («четырёхструние»), от пятой до восьмой — второй тетрахорд. Системы настройки струн отличаются друг от друга внутренним устройством тетрахордов.

8. Дуодецима и двойная октава. Ещё один консонансный интервал получается сложением октавы и квинты. Он называется *дуодецимой* (а греки называли его просто «*διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε*»). Наконец, две октавы, составленные вместе, дают ещё один консонансный интервал — *двойную октаву* (рис. 2). Созвучия дуодецимы и двойной октавы, в отличие от квинты и кварты, являются резонирующими, но их резонанс заметно слабее, чем у октавы.

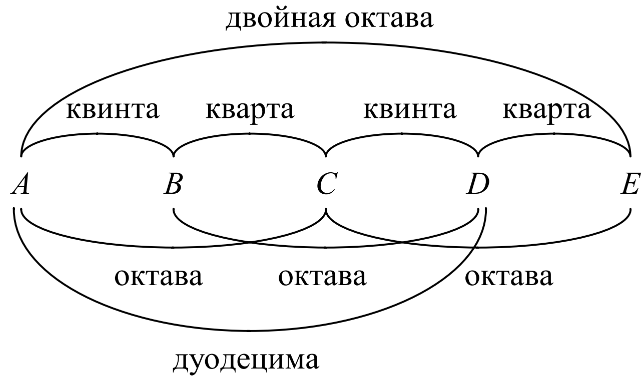

Рис. 2

9. «Дочисловая математика». Следует особо подчеркнуть, что описанная выше система понятий уже является математической по своей природе, хотя никакой речи о числах пока ещё не велось. Как было сказано М. Хайдеггером в докладе *Время картины мира* (1993, с. 43),

> Только потому, что число ярче всего бросается в глаза как всегда-уже-известное, будучи самым знакомым из всего математического, математикой стали называть числовое. Но никоим образом существо математики не определяется числом.

Когда мы представляем голоса точками на высотной шкале, мы тем самым рассматриваем их как интенсивные величины, с заданным на них отношением порядка. Далее, переходя от голосов к интервалам, мы задаём на них отношение равенства, полагая, к примеру, что все октавы, отложенные от различных нижних нот, будут равны между собой. Пользуясь категориальной парой «часть-целое», мы сравниваем интервалы по величине, а также складываем их и вычитаем. Тем самым мы рассматриваем интервалы как экстенсивные величины, на которых задана аддитивная структура.

Выбрав один какой-то интервал за единицу измерения, мы могли бы в принципе измерять все прочие интервалы этой мерой. Однако здесь имеется одно существенное ограничение: наш слух позволяет нам приравнивать и переносить по высоте не произвольные интервалы, но только лишь созвучные. Стало быть, все операции настройки высоты можно мыслить как теоретически точные лишь в той мере, в какой при их выполнении мы пользуемся одними лишь созвучными интервалами. Именно в этом пункте теоретическая гармоника расходится с геометрией: ведь последняя способна откладывать равные отрезки произвольной длины, а первая может с помощью слуха откладывать в качестве равных лишь созвучные интервалы. Этот факт приводит к собственным проблемам теоретической гармонии, о которых речь пойдёт несколько ниже.

3. Гармония как структура числовых отношений

1. Переход от феноменологии к числовым отношениям. О том, что музыкальной гармонией в собственном смысле этого слова пифагорейцы называли сначала замкнутую структуру созвучий, изображённую на рис. 1, — а переход к числовым соотношениям, характеризующим эти созвучия, был следующим шагом математизации гармонии, имеется следующее свидетельство АРИСТОТЕЛЯ в трактате *О душе* (408a6–8):

> Говоря о гармонии, мы имеем в виду два её значения: прежде всего это сочетание величин, имеющих движение и положение, когда они так сопряжены (*συναρμόζωσιν*), что больше уже не могут принять в себя ничего однородного; а затем уже это отношение частей смеси.

Мысль приписать созвучным интервалам определённые числовые отношения несомненно возникла у пифагорейцев из наблюдений за размерами звукоизвлекающих органов в некоторых музыкальных инструментах, таких как флейта Пана и струнный инструмент под названием «пандурос», у которого высота извлекаемого звука менялась прижатием струны к грифу.

Важнейший и легко обнаруживаемый опытный факт состоит в следующем: чтобы поднять на октаву звук струны, нужно пережать эту струну ровно посредине и заставить звучать её половину. Аналогичное соотношение наблюдаются и у некоторых других звукоизвлекающих устройств. В *Музыкальных проблемах*, входящих в корпус сочинений АРИСТОТЕЛЯ, об этом говорится так:

> (919b1–14) Почему нета является двойной в сравнении с гипатой? В первую очередь не потому ли, что дёрнув половину струны и целую струну, мы получаем октаву? Это происходит и в сирингах: звуки, производимые через среднее отверстие и на всей сиринге, звучат в октаву. И на авлосах двойной интервал даёт октаву, чем пользуются изготовители авлосов. И те, кто делает сиринги, затыкают восковой пробкой конец гипаты и середину неты... Далее, гипата и нета на треугольных псалтериях при равном натяжении дают созвучие октавы, если одна струна в два раза длиннее другой.
>
> (932b35–933a3) Почему два равных и подобных сосуда, из которых один пуст, а другой наполовину наполнен, дают созвучие октавы? Не потому ли, что наполовину наполненный образует двойное отношение к пустому? Это происходит и в сирингах. Ведь чем быстрее движение, тем выше кажется голос, и большое наполняется воздухом медленнее, а именно двойное — в два раза, и пропорционально в других случаях. И если из двух винных мехов один в два раза больше другого, они дают созвучие октавы.

2. Дальнейшие опыты со струнами. Ещё один подъём на октаву даёт уменьшение длины в $2 \times 2 = 4$ раза. Стало быть, сложению интервалов (аддитивная структура) соответствует перемножение отношений (мультипликативная структура). В древнегреческой математике такое действие называлось «составлением сложных отношений».

Возьмём теперь три струны одинаковой длины A, B, C и настроим их в унисон. Затем пережмём струну C посредине, чтобы она звучала в октаву со струной A.

Посмотрим теперь, что получится, если пережать струну *B* таким образом, чтобы длина её звучащей части оказалась средним арифметическим между длинами струн *A* и *C* (рис. 3). Опыт показывает, что струна *B* звучит теперь в квинту со струной *C* и в кварту со струной *A*. При этом отношение длин струн $B : C = 3 : 2$, $A : B = 4 : 3$.

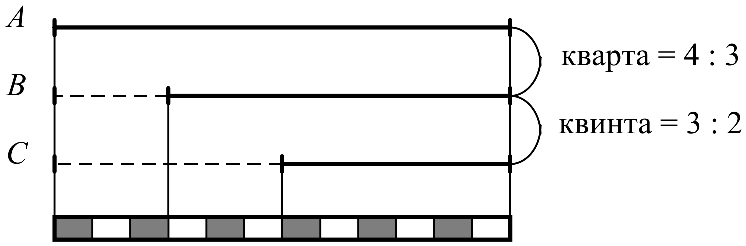

Рис. 3

А теперь пережмём струну *B* таким образом, чтобы она звучала в кварту со струной *C* и в квинту со струной *A*. При этом должно быть $B : C = 4 : 3$, $A : B = 3 : 2$. Чтобы получить точку пережатия, надо разность между длинами струн *A* и *C* разделить пропорционально длинам этих струн в отношении 2 : 1 (рис. 4). Получившееся среднее называется средним гармоническим; его свойства будут подробно обсуждены ниже.

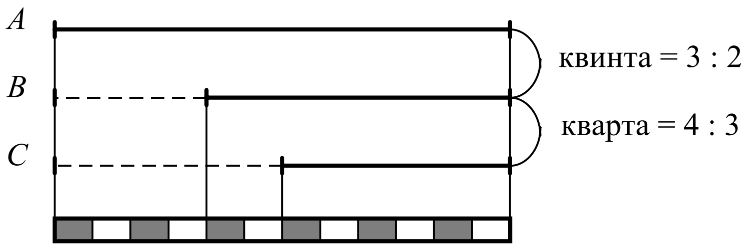

Рис. 4

3. Числовая структура гармонии. В соответствии с описанными выше опытами, числовое представление гармонии (рис. 5) задаётся четвёркой взаимно простых чисел, из которых самое меньшее должно делиться на 3 и 4, а стало быть, оно равно 6. При этом $^4/_3$ от 6 — это 8, $^3/_2$ от 6 — это 9, два раза по 6 — это 12. Сами греки говорили, что 12 к 6 находится в двойном отношении (διπλάσιος λόγος), 12 к 8 и 9 к 6 — в полуторном отношении (ἡμιόλιος λόγος), 12 к 9 и 8 к 6 — в эпитритном отношении (ἐπίτριτος λόγος — букв. «превышающий на треть»).

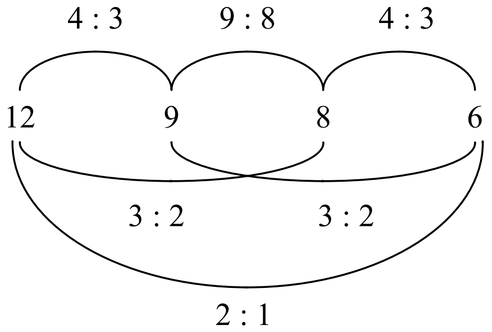

Рис. 5

Стандартное описание числовой структуры гармонии приведено в следующем отрывке из трактата СЕКСТА ЭМПИРИКА *Против логиков* (I, 94–97):

> Гармония есть система трёх созвучий — кварты, квинты и октавы. Численные пропорции этих трёх созвучий находятся в пределах указанных выше четырёх чисел, то есть в пределах единицы, двух, трёх и четырёх. А именно, созвучие кварты является в виде эпитритного отношения, квинты — полуторного и октавы — двойного. Отсюда число четыре, будучи эпитритным от трёх, поскольку оно составляется из трёх и его третьей доли, обнимает созвучие кварты. Число три, будучи полуторным от двух, поскольку содержит два и его половину, выражает созвучие квинты. Число же четыре, будучи двойным в отношении двух, и число два, будучи двойным в отношении единицы, определяют созвучие октавы.

4. «Опыты» пифагорейцев в позднейших описаниях. В позднейшее время об экспериментальном открытии числовой структуры гармонии были сочинены разнообразные легенды. НИКОМАХ в *Наставлении по гармонике* (6, 1) и некоторые более поздние авторы рассказывают, что ПИФАГОР, проходя мимо кузницы, услышал, как удары четырёх молотков производят основные гармонические созвучия. Тщательно взвесив молотки, он установил, что их веса относятся как 12 : 9 : 8 : 6. Придя затем домой, он взял четыре одинаковых струны, нагрузил из весами в указанной пропорции и извлёк из этих струн четыре звука гармонии.

В анонимных схолиях к *Федону* (18 12 DK) со ссылкой на АРИСТОКСЕНА и НИОКЛА передаётся рассказ о том, как пифагореец ГИППАС изготовил четыре медных диска одного диаметра с толщинами в указанной пропорции и извлекал из них гармонические созвучия. Неоднократно указывалось на то, что все эти опыты в физическом отношении совершенно невозможны, так что приводимые рассказы представляют собой не более чем литературный вымысел, составленный задним числом.

Существенно более содержательным является следующее сообщение ТЕОНА СМИРНСКОГО ($59_{4\text{–}21}$):

> Одни полагали, что эти созвучия следует получать исходя из весов, другие — из величин, третьи — из движений [и чисел], четвёртые — из сосудов [и объёмов]. ЛАС из Гермиона, с которым согласны последователи пифагорейца ГИППАСА из Метапонта, полагая, что частота движений, от которых получаются созвучия, соответствует отношениям чисел, получал такие соотношения на сосудах. Взяв равные и одинаковые сосуды, он один из них оставил пустым, а другой наполнил водой

> наполовину, и они давали созвучие октавы. Затем он оставлял один сосуд пустым, а второй наполнял водой на одну четверть, и при ударе (*κρούσαντι*) они давали созвучие кварты. Квинта получалась, когда он заполнял второй сосуд на одну треть. Таким образом, отношение пустоты одного сосуда к пустоте другого было для октавы 2 к 1, для квинты 3 к 2, для кварты 4 к 3.

В этом сообщении всё будет совершенно правильным, если «удар» понимать не как удар твёрдым предметом по сосуду, а как извлечение звука вообще. Называть звукоизвлечение «ударом» — это общее место всех античных текстов по акустике, начиная с Архита. Как пишет Аристотель в трактате *О душе* (419b10), «звук в действии всегда порождает что-то обо что-то в чём-то. Ведь именно удар (*πληγή*) есть производящее». Звучание струны возникает за счёт того, что вибрирующая струна бьёт по воздуху; но и голос авлоса возникает за счёт движения воздуха, порождающего некие «удары» (которые хорошо ощущаются пальцами, закрывающими отверстия авлоса).

5. Учение о созвучных интервалах в *Sectio canonis*. Своеобразная версия пифагорейского учения о созвучных интервалах изложена в анонимном трактате *Деление канона* (*Sectio canonis*). Этот трактат раньше было принято включать в корпус сочинений Евклида; однако соображения, изложенные Ван дер Варденом в работе (1943/59), позволяют предполагать с высокой степенью уверенности, что действительным его автором был Архит Тарентский. Конспективный пересказ 1–16 предложений этого трактата даёт Птолемей в *Гармонике* (I, 5), называя излагаемое учение пифагорейским. Доказательство ключевого 3 предложения воспроизводит Боэций в *Музыкальном наставлении* (III, 11), прямо называя его автором Архита. Крайне невнятный пересказ 11 и 12 предложений содержится также в *Музыкальных проблемах* Аристотеля (921b1–13).

В своём теоретизировании Архит исходит из гипотезы о том, что всем созвучным интервалам соответствуют либо кратные, либо сверхчастные отношения. (Отношение называется кратным, когда одно число измеряется другим; сверхчастным — когда одно число превосходит другое на их общую меру.) Далее он предпринимает попытку на основе этой гипотезы умозрительно соотнести все созвучные интервалы с однозначно определяемыми отношениями чисел.

Первым делом показывается, что интервал октавы является кратным. В самом деле, из опыта известно, что интервалы октавы и двойной октавы являются созвучными. Но двойная октава не может быть сверхчастной, так как сверхчастные интервалы не допускают деления пополам. Следовательно, двойная октава является кратной. Но если кратный интервал допускает деление пополам, то его половина тоже будет кратной. Поэтому октава является кратной.

Далее делается попытка доказать, что интервалы кварты и квинты являются сверхчастными. Кварта и квинта созвучны, поэтому каждый из этих интервалов будет либо кратным, либо сверхчастным. Но если бы они были кратными, то тогда и двойные кварта и квинта были бы кратными, и тем самым созвучными. Однако из опыта известно, что эти двойные интервалы не являются созвучными. Следовательно, кварта и квинта не являются кратными. Поэтому они являются сверхчастными.

Наконец, показывается, что октаве соответствует двукратное отношение, квинте — полуторное, и кварте — эпитритное. В самом деле, кратный интервал октавы составляется из сверхчастных интервалов квинты и кварты. Но есть только один способ составить кратный интервал из двух сверхчастных: это когда двукратный интервал составляется из полуторного и эпитритного. А других возможностей нет: ведь двукратный интервал — наименьший из кратных, а полуторный и эпитритный интервалы — наибольшие из сверхчастных. Наконец, квинта больше кварты, значит квинта является полуторной, а кварта — эпитритной.

Всё это рассуждение может рассматриваться как смелая попытка оставить опыт в стороне и перейти о него к «чистому умозрению». Но эту попытку следует признать неудачной. Во-первых, сама исходная гипотеза теоретически обоснована быть никак не может, и возникает она не иначе как из предварительного опыта. Во-вторых, приведённое рассуждение содержит логическую ошибку: из предположения о том, что все созвучные интервалы являются кратными либо сверхчастными, отнюдь не следует, что все кратные и сверхчастные интервалы являются созвучными. Архит же пользуется таким обращением логического следования, когда из разнозвучности двойных квинты и кварты заключает о том, что эти интервалы не являются кратными.

4. Причина возникновения созвучий

1. «Высокие звуки движутся быстрей, а низкие — медленней». Первая теория, объясняющая причину возникновения высоких и низких звуков, излагается во фрагменте сочинения Архита *О математических науках*, сохранившимся у Порфирия в *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* (56_2–57_{23}). Сам Архит приписывает эту теорию неким «знатокам математических наук», жившим до него.

> Из ощущаемых [звуков] те, что приходят от ударов быстро и <сильно>, воспринимаются высокими, а те, что медленно и слабо, воспринимаются низкими. Так, если взять прут и хлестать им вяло и слабо, то от удара получится низкий звук, а если быстро и сильно — то высокий. Мы можем судить не только по этому, но и по тому, что когда мы говорим или поём и нам нужно издать громкий и высокий голос, мы достигаем этого сильным выдохом. Так же и с метательными снарядами: пущенные сильно летят далеко, слабо — близко. Ведь летящим сильно воздух подаётся больше, а слабо — меньше. То же и с голосами: движущиеся от сильного выдоха окажутся громкими и высокими, а от слабого — тихими и низкими. Мы можем воочию убедиться в этом и на основании следующего неопровержимого признака: одно и то же, звучащее громко, мы услышим даже издалека, а тихо — не услышим даже вблизи. Так же и с авлосами: когда выдох попадает в ближние ото рта дырочки, то вследствие большой силы он издаёт более высокий звук, когда в дальние — более низкий, откуда ясно, что быстрое движение производит высокий звук, а медленное — низкий. То же и в тамбуринах, которыми трясут при посвящении: когда ими трясут тихо, они издают низкий звук, когда сильно — высокий. То же и с тростниковой дудочкой: если подуть в неё, заткнув её в нижней части, она издаст <низкий> звук, если же заткнуть посередине или в любом другом месте, будет звучать высоко. Ведь одинаковый выдох через большое расстояние пролетает слабо, а через меньшее — сильно.

Весь этот текст выглядит весьма смутным: здесь в одну кучу собраны не только разные явления, связанные с извлечением звука, но также и полёт летательных снарядов, который объясняется круговым толчком воздуха, известным в первую очередь по *Физике* АРИСТОТЕЛЯ. Возможно, что полёт снарядов попал в этот список по той причине, что летящие тела издают свистящие звуки, так же как и прут при резком движении. Из опыта понятно, что быстрота перемещения прута, «резкость» вдувания воздуха во флейту и т. п. как-то связаны с высотой звука. Похоже, что АРХИТ считал, что быстрый взмах прута приводит к быстрому движению воздуха, и возникающий высокий звук летит «как целое» во все стороны от прута с высокой скоростью; а если двигать прутом не так быстро, то звук будет ниже и распространяться он будет медленнее. Но тогда совсем уже непонятно, как из движений разной быстроты возникают созвучные и несозвучные интервалы.

Передаваемое АРХИТОМ пифагорейское учение воспроизводится в ещё одной версии ПЛАТОНОМ в *Тимее* (80ab). В этом тексте, восходящем по всей видимости к тому же источнику, можно усмотреть более определённые выводы о причине возникновения высоких и низких звуков и гармонических созвучий.

> [В бесконечной череде действий и противодействий следует искать объяснение голосам], которые в зависимости от своей быстроты или медленности (*ταχεῖς τε καὶ βραδεῖς*) являются высокими или низкими, причём иногда они не гармонируют между собой из-за неподобия (*δι᾽ ἀνομοιότητα*) производимого в нас движения, а иногда созвучны благодаря подобию (*δι᾽ ὁμοιότητα*). Ведь когда более медленные звуки приходят вслед за более быстрыми, ранее дошедшими до нашего слуха, те оказываются уже обессилевшими, а их движения — подобными движениям, которые при своём запоздалом прибытии вносят более медленные звуки; поэтому последние не становятся причиной разлада, но вместо этого начало медленного и окончание быстрого движения уподобляются друг другу, и так возникает единое состояние, в котором смешаны высокое и низкое звучания. Ведь когда первые и быстрые [голоса] замедляются движением медленных, тогда они приходят подобно, и в дальнейшем их движения происходят совместно, охватываемый с охватывающим, и не так, что получается неслаженное движение, но так, что начало медленного вклада совпадает с началом быстрого, и их завершения тоже, в результате чего они соединяются подобно, и высокий и низкий [голоса] смешиваются в одном ощущении.

Описание ПЛАТОНА тоже не отличается особой ясностью. Так же, как и АРХИТ, он считает, что высокие звуки распространяются быстрее, а низкие — медленнее. Однако в этом описании «быстрота и медленность» вовсе не обязательно должны пониматься как скорости распространения высоких и низких звуков, — тем более, что явление возникновения созвучий определённо связывается с «бесконечной чередой действий и противодействий». Поэтому быстрота и медленность могут пониматься и как частотные характеристики этой череды повторений: «высокий и быстрый» звук — это тот, где повторы последовательных ударов по воздуху происходят часто, «низкий и медленный» — где повторы происходят редко. Ключевым моментом для возникновения консонанса является то, что ПЛАТОН называет «подобием движений», когда «начала и завершения медленного и быстрого вкладов совпадают». Мне думается, что эту часть описания никаким иным образом, кроме как частотным, понять просто нельзя; соответствующая модель будет рассмотрена в следующем разделе.

Существенно более ясное изложение физической причины, по которой различаются высокие и низкие звуки, дано в самом начале трактата *Sectio canonis* (автором которого, как уже было указано выше, тоже мог являться Архит). Здесь ни слова не говорится о скорости распространения звука, но только лишь о частоте, с которой наносятся отдельные удары:

> Так как все звуки возникают от удара, а удар не мог бы случиться без предшествующего движения, из движений же одни плотнее, а другие реже, и от более плотных получаются более высокие голоса, а от более разреженных — более низкие, то по необходимости одни будут более высокими, поскольку они составляются из более плотных и многочисленных движений, а другие — более низкими, поскольку они складываются из более разреженных и малочисленных движений.

2. «Подобия и неподобия». Отношения длин струн и прочие факторы, связанные с самим звучащим телом, являются причинами возникновения созвучий лишь привходящим образом, поскольку один и тот же звук можно извлечь из струн разной длины. Истинной же причиной возникновения созвучий является соотношение частот, с которыми звучащие тела наносят свои удары по воздуху.

Если два голоса образуют октаву, то частоты ударов относятся как 2 : 1, поэтому на каждый удар низкого голоса приходится 2 удара высокого голоса, так что из 3 ударов 2 звучат слитно, а 1 нет. Для квинты частоты ударов относятся как 3 : 2, поэтому из каждых 5 ударов 2 сливаются, а 3 нет. Для кварты частоты ударов относятся как 4 : 3, поэтому из каждых 7 ударов 2 сливаются, а 5 нет (рис. 6).

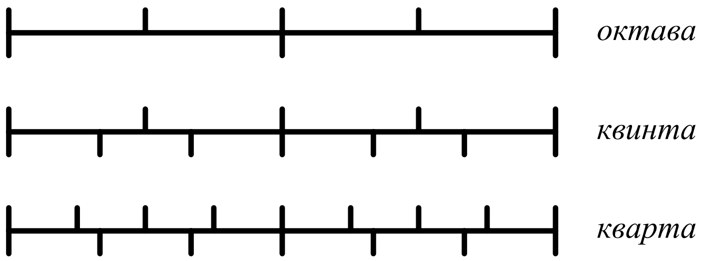

Рис. 6

Эта причина возникновения созвучий описывается во входящих в аристотелевский корпус трактате *De audibilibus* и *Музыкальных проблемах* (921a16–24):

> Голоса созвучия относятся друг к другу как их движения. В других созвучиях окончание одного голоса является поворотным, поскольку другой завершается наполовину; так что они потенциально не равны. Будучи неравными, они различаются в восприятии... В октаве же имеется некое совпадение периодов голосов. Ведь второй удар неты приходится на пробел гипаты. Они оканчиваются вместе, и хотя и не делают одно и то же, но выполняют в результате общее дело.

Б. Л. Ван дер Варден (1943/59) приписывает авторство данной теории Гераклиду из Понтиды, однако употребление в приведённом выше отрывке из *Тимея* таких выражений, как «подобие и неподобие звучаний», заставляют предполагать наличие какого-то более раннего автора. Порфирий в *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* описывает вычисление неподобия созвучий весьма подробно, хотя и без объяснения физических причин (107_{15}–108_{18}):

> Как сообщают Архит и Дидим, некоторые из пифагорейцев, установив отношения созвучий, сравнивали их между собой и, желая продемонстрировать более консонирующие, поступали так. Взяв первые числа, которые они называли «основаниями», из тех, что составляют отношения созвучий... они отнимали по единице от каждого из чисел, составляющих члены каждого отношения, и смотрели, какие числа остались после отнятия. Так, например, отняв по единице от 2 и 1, выражавших октаву, они смотрели остаток: он был равен одному. Отняв по единице от 4 и 3, выражающих кварту, в остатке от четырёх они получали три, от трёх — два, так что совместный остаток обоих членов после отнятия составлял пять. Отняв по единице от 3 и 2, выражавших квинту, в остатке от трёх они получали два, от двух — один, так что совместный остаток составлял три. Отнимаемые единицы они называли подобными (ὅμοια), а остатки вычитания — неподобными (ἀνόμοια) по двум причинам, ведь от обоих членов отнималось подобное и равное: ибо единица равна единице. Остатки вычитания необходимо должны быть неподобными и неравными. Ведь если от неравных отнять равные, остатки будут неравными. Между тем отношения кратности и сверхчастности, в которых теоретически рассматриваются созвучия, сводятся к неравных членам, и, следовательно, при отнятии от них равного остатки всегда будут неравными. Неподобия созвучий получаются совмещением (συμμιγέντα), а о совмещении пифагорейцы говорят, когда одно число получается из двух. Так вот, суммарные неподобия для каждого созвучия таковы: для октавы 1, для кварты 5, для квинты 3. Чем меньше неподобие, говорят они, тем сильнее созвучие.

5. Диатоническая гамма пифагорейцев

1. Платон о диатонической гамме. Развёрнутое описание пифагорейской диатонической гаммы даёт Платон в *Тимее* (35b–36b), описывая устройство «космической гармонии»:

> Делить же [демиург] начал следующим образом: прежде всего отделил от целого одну долю, затем вторую — удвоенную, третью — полуторную в сравнении со второй и тройную в сравнении с первой, четвёртую — двойную в сравнении со второй, пятую — тройную в сравнении с третьей, шестую — восьмикратную в сравнении с первой, а седьмую — больше первой в двадцать семь раз. После этого он стал заполнять образовавшиеся двойные и тройные интервалы, отсекая от той же смеси всё новые доли и помещая их между прежними долями таким образом, чтобы в каждом интервале было по два средних члена, из которых один на одну и ту же долю превышал бы меньший из крайних членов и превышался бы большим, а другой превышал бы меньший крайний член и уступал большему на одинаковое число. Благодаря этим скрепам возникли новые полуторные, эпитритные и сверхвосьмерные интервалы внутри прежних интервалов. Тогда он заполнил все эпитритные интервалы сверхвосьмерными интервалами, оставляя от каждого интервала такую

часть, чтобы пределы этих оставшихся интервалов всякий раз относились друг к другу численно как 256 к 243. При этом смесь, от которой брались упомянутые доли, была истрачена до конца.

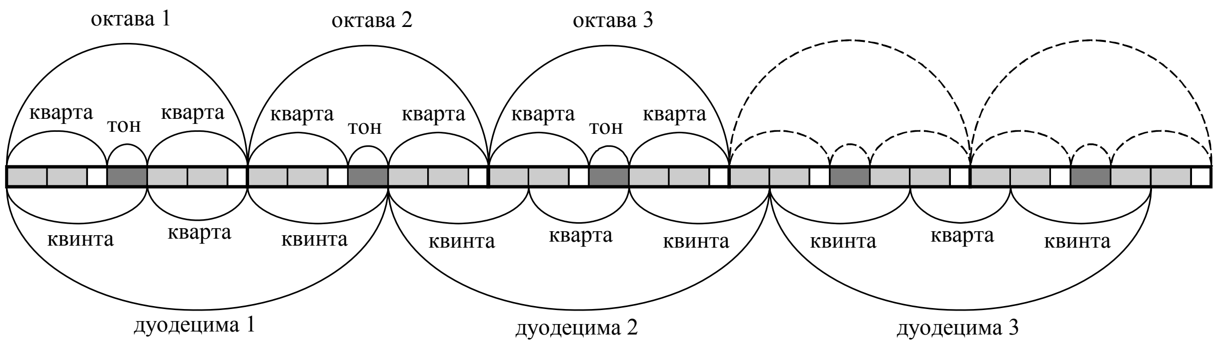

Рис. 7

Описанное Платоном построение изображено схематически на рис. 7. Оно начинается с разворачивания от единицы двух непрерывных пропорций из четырёх членов каждая; одна из них идёт октавами по степеням двойки 1 : 2 : 4 : 8, а другая — дуодецимами по степеням тройки 1 : 3 : 9 : 27. Будучи «перемешанными», члены обоих пропорций дают восходящий ряд чисел

$$1 - 2 - 3 - 4 - 8 - 9 - 27,$$

между соседними членами которого уже содержатся все консонансные интервалы, а также основной тон. Любопытно, что последнее число этого ряда 27 представляет собой сумму всех предыдущих чисел: 27 = 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9; с попытками истолкования «особых» свойств числа 27 мы ещё встретимся ниже, при рассмотрении фрагмента Филолая.

После того, как построены восходящие последовательности октав и дуодецим, начинается деление этих интервалов по схемам, изображённым на рис. 5 (для октавы) и рис. 8 (для дуодецимы).

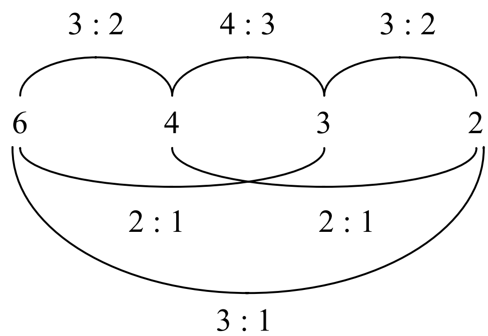

Рис. 8

Затем все оставшиеся неразделенными кварты заполняются изнутри целыми тонами. Если из кварты 4 : 3 последовательно вычесть два целых тона 9 : 8, остаток (λεῖμμα) будет выражаться отношением 256 : 243.

Построенная таким образом система музыкальных интервалов называется *диатонической гаммой*. Эта система — самая удобная для настройки музыкальных инструментов, которая ведётся здесь только по основным созвучиям: ведь откладывание вверх целого тона можно осуществить поднятием на квинту и опусканием на кварту.

2. Диатоническая гамма у пифагорейцев. НИКОМАХ в *Руководстве по гармонике* (9, $1_{1–23}$) приводит следующий текст, восходящий к ФИЛОЛАЮ из Кротона, у родственников которого ПЛАТОН приобрёл книги, по которым он изучал пифагорейскую науку, и к которому восхотят построения, описанные в *Тимее*.

Малый полутон в этом тексте называется диезом (δίεσις = «отпускание»).[2] Названия для квинты и кварты — тоже необычные.

> С нашим сообщением согласуются и разъяснения древних, которые называли октаву гармонией, квинту — слогом (συλλαβή) (в первую очередь потому, что она есть слияние звуков в созвучие), кварту — повышением (δι᾽ ὀξειᾶν) (ведь непрерывность первородных созвучий квинты и кварты идёт на повышение (ἐπὶ τὸ ὀξύ)). Система из слога и повышения есть октава (а она потому называется гармонией, что настраивается как первое созвучие среди созвучий). И всё это ясно изложил ФИЛОЛАЙ, приемник ПИФАГОРА, в первой книге *Физики*. Это подкреплено одним достоверным свидетельством, и многие по-разному говорили об этом. А сам ФИЛОЛАЙ говорит об этом так: «Величина гармонии — слог и повышение. Слог превосходит повышение на восьмую часть. Ведь от гипаты до месы — повышение, от месы до неты — слог, от неты до триты — повышение, от триты до гипаты — слог. Между месой и нетой — сверхвосьмерное, повышение является эпитритным, слог — полуторным, гармония — двойной. Таким образом, гармония — это пять раз сверхвосьмерное и два диеза. Слог — три раза сверхвосьмерное и диез, повышение — два раза сверхвосьмерное и диез».

3. Проблема коммы. Посмотрим, что произошло бы, если бы ПЛАТОН в своём описании стал подниматься октавами и дуодецимами ещё выше. На рис. 6 мы видим, что 2 дуодецимы поднимаются на 3 октавы и тон. Тем самым 6 дуодецим поднялись бы на 9 октав и 3 тона. Но подъём на 3 тона от нижнего звука октавы даёт звук такой высоты, которого не было в исходной системе. Если бы попадание пришлось ровно в середину центрального тона октавы, заключённого между двумя квартами (и тем самым — в середину октавы), то ещё через 6 дуодецим подъём составил бы ровно 19 октав, и цикл замкнулся бы.

Однако такого попадания в середину не происходит, и в этом заключается основная теоретическая проблема, связанная с пифагорейской диатонической системой. Дело в

[2] Применительно к пифагорейской теории «диез» — это всегда малый полутон. Однако в других теоретических системах античной музыки «диез» может являться и меньшей частью тона. Об этом пишет, в частности, ТЕОН СМИРНСКИЙ ($55_{11–15}$): «Последователи АРИСТОКСЕНА называют наименьшим диезом четверть тона, половину полутона, наименьший мелодический интервал, однако пифагорейцы называют диезом только что названный полутон».

том, что 12 дуодецимам не равны 19 октавам, поскольку $3^{12} > 2^{19}$. Разность 12 дуодецим и 19 октав, выразимая отношением $3^{12} : 2^{19} = 531441 : 524288$, называется *коммой*. Комму можно мыслить также разностью 12 квинт и 7 октав, либо 6 тонов и 1 октавы.

4. Леймма и апотома. Как было сказано выше, интервал $2^8 : 3^5 = 256 : 243$ называется *лейммой* или *диезом*. Разность между тоном и лейммой равна $3^7 : 2^{11} = 2187 : 2048$, этот интервал называется *апотомой* (ἀποτομή = «отрезок»). Нетрудно убедиться в том, что апотома больше лейммы; поэтому их называют соответственно большим и малым полутоном. Разность между апотомой и лейммой равна комме.

(ПРОКЛ, *Комментарий к «Тимею»*, II, 189_{18}) Как мы сказали, апотома есть остаток, которым леймма дополняется до целого тона... (190_2) То, что отношение апотомы содержится в этих числах в виде основания, очевидно: на основании теоремы о антифайресисе доказывается, что числа 2187 и 2048 — первые между собой, а первые — с необходимостью наименьшие. Большинство терминов, приводимых в *Тимее*, очевидно заимствованы у ФИЛОЛАЯ, но чертёж ПЛАТОНА прогрессирует и без отношения апотомы.

(АРИСТОТЕЛЬ, *Метафизика*, 1053a5–17) [Все делают мерой] то, что как первое в восприятии не допускает [прибавления и отнятия]... За начало и меру... в музыке берётся полутон (δίεσις), как наименьший... Однако не всегда бывает одна мера по числу, иногда мер больше; так имеется два полутона, различающиеся между собой не на слух, а своими отношениями.

5. Деление тона у Филолая. Надо заметить, что термин comma приводится у БОЭЦИЯ при описании системы ФИЛОЛАЯ, и не встречается ни в одном греческом тексте. Приведём соответствующие отрывки текста БОЭЦИЯ.

(III, 276_{15}) Пифагореец ФИЛОЛАЙ попытался делить тон иначе. Он полагал началом тона первое число, представляющее собой куб первого нечётного числа — свойство, весьма почитавшееся у пифагорейцев. Поскольку первое нечётное число — 3, то если помножить три на три трижды, по необходимости получится 27 — число, образующее с 24 интервал в один тон, сохраняя ту же разность 3. Действительно, три есть восьмая часть от 24 и, будучи прибавлено к 24, образует первый куб от трёх — 27. ФИЛОЛАЙ делит его на две части: одну — больше половины, он её называет апотомой, другую — меньше половины, её он, в свою очередь, называет диезом (позднейшие назвали её малым полутоном), а их разность — коммой. Он считает, что диез состоит из 13 единиц, во-первых, потому что такова разность между 256 и 243, во-вторых, потому что то же самое число 13 состоит из 1, 3 и 9, где 1 занимает место точки, 3 — первой нечётной линии, 9 — первого нечётного квадрата. Полагая на этом основании 13 диезом, остальную часть числа 27, содержащую 14 единиц, он принимает за апотому. Но поскольку разность между 14 и 13 составляет единицу, он полагает, что единицу следует принять за комму. Тон, по его мнению, состоит из 27 единиц, так как разность между 216 и 243, интервал между которыми равен тону, составляет 27.

Обоснования, которые даёт ФИЛОЛАЙ своему делению тона, выглядят весьма странно; однако движение его мысли нетрудно реконструировать. Представив кварту суммой двух тонов и диеза, Филолай выражает границы всех интервалов четвёркой взаимно простых чисел, где меньшее число 192 = 8 · 8 · 3 (рис. 9).

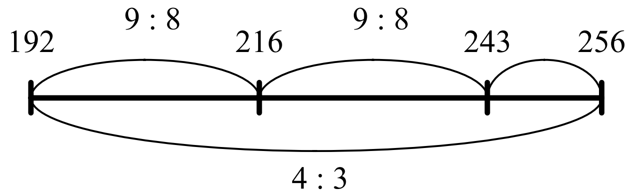

Рис. 9

Далее он вычисляет разности 216 – 192 = 24, 243 – 216 = 27, 256 – 243 = 13, упоминаемые в тексте. А далее он делает неправильный вывод, что если тон оказался равным 27 единицам, а диез 13 единицам, то на долю апотомы внутри тона остаётся 14 единиц. При этом к 13 зачем-то подстёгивается равенство 13 = 1 + 3 + 9. Ошибка Филолая заключается в том, что интервалы измеряются не разностями чисел, но их отношениями; ведь по разностям и оба тона оказались неравными, хотя по отношениям они равны.

> (III, 278_{11}) Эти интервалы и меньшие, чем они, Филолай определяет так. Диез, по его словам, есть интервал, на который кварта превосходит два тона. Комма — интервал, на который целый тон превосходит два диеза, то есть два меньших полутона. Схизма есть половина коммы, диасхизма — половина диеза, то есть меньшего полутона.

Зачем нужны *схизма* ($\sigma\chi$ί$\sigma\mu\alpha$ = «щель»), равная половине коммы, и *диасхизма*, равная половине диеза, как они вычисляются и какую роль играют в общей системе гармонии, из самого этого текста совершенно непонятно. Отметим, что эти греческие термины сохранились только в латинском тексте Боэция. Ван дер Варден (1943/59) отмечает, что диасхизма могла была нужна Филолаю для построения энгармонической гаммы, о которой речь пойдёт ниже.

6. Противоречие между «гармониками» и «математиками»

1. Делится ли тон на равные части? Последовательное взаимное вычитание интервалов, производимое на практике посредством движения вверх-вниз по квинтам и квартам, могло привести на опыте к следующей приближённой последовательности соотношений между интервалами:

октава = квинта + кварта,
квинта = кварта + тон,
кварта = тон + тон + леймма,
тон = леймма + леймма.

Отсюда тон = 2 лейммам, кварта = 5 лейммам, квинта = 7 лейммам, октава = 12 лейммам. Можно предположить, что такой расчёт и принимался на практике. Однако пифагорейцами было установлено, что при точном вычитании интервалов остановки не происходит:

октава = квинта + кварта
квинта = кварта + тон
кварта = тон + тон + леймма
тон = леймма + леймма + комма
и так далее.

Тот факт, что тон не равен в точности двум лейммам, вряд ли был установлен на слух; скорее, он был обнаружен теоретически, как об этом пишет Плутарх (*О психогонии «Тимея»*, 1020e):

> Один из интервалов — так называемый тон, на который кварта превосходит квинту. Гармоники делят его пополам, полагая, что тем самым получают два интервала, каждый из которых они называют полутоном (*ἡμιτόνιον*). Но пифагорейцы признали невозможным деление его на две равные части, и из двух неравных частей меньшую называют лейммой, так как ей не достаёт до половины. Вот почему консонанс кварты состоит из двух тонов и полутона, из двух [тонов] и лейммы. Для гармоников свидетельством тому служит восприятие, а для математиков доказательство, исходящее из того, что зафиксировано теоретическим инструментом (*διὰ τῶν ὀργάνων θεωρηθέν*): октава имеет двойное отношение, квинта — полуторное, кварта — эпитритное, и тон — сверхвосьмерное.

Гармоники здесь — это те, кто считает правильным ограничиться феноменологической теорией вычитания интервалов, производя это вычитание путём слуховой настройки. Математики же — это пифагорейцы, которые производят вычитание интервалов согласно математической теории, основанной на числовых соотношениях, полагаясь на «теоретический инструмент».

2. Сведения о гармониках у Платона. Главным представителем «гармоников» для Плутарха и других позднеантичных авторов был конечно же Аристоксен — ученик Аристотеля, создатель первого античного учения о музыке (см. Winnington-Ingram 1932, Litchfield 1988, Цыпин 1998). Однако у Аристоксена имелись безымянные предшественники, сведения о деятельности которых мы можем почерпнуть как из его *Элементов гармоники*, так и из диалогов Платона. Противопоставление двух видов музыкальной настройки, одна из которая строит созвучие «на мере», а другая — «на слух», обсуждается в диалоге Платона *Филеб* (55e–56c).

> *Сократ*. Допустим, что кто-нибудь выделит во всех искусствах счёт, измерение и взвешивание, — в таком случае остальное окажется, так сказать, несущественным.
>
> *Протарх*. Конечно, несущественным.
>
> *Сократ*. А оставшееся было бы подражанием и упражнением ощущений с помощью опыта, навыка и способностей к угадыванию, многие называют это искусствами, добивающимися результата упражнением и трудом.
>
> *Протарх*. То, что ты говоришь, совершенно необходимо.
>
> *Сократ*. А этим полна прежде всего та музыка, которая строит созвучие не на мере, но на упражнении чуткости; такова же и авлетика, потому что она ищет меру

> всякой движимой струны по догадке, так что содержит в себе много неясного, устойчивого же мало.

Это же противопоставление является центральной темой следующего разговора между Сократом и Главконом в *Государстве* Платона (530e–531c):

> — Те, кого мы воспитываем, пусть даже не пытаются изучать что-нибудь несовершенное и направленное не к той цели, к которой всегда должно быть направлено всё, как мы только что говорили по поводу астрономии. Разве ты не знаешь, что и в отношении гармонии повторяется та же ошибка? Так же, как астрономы, люди трудятся там бесплодно: они соизмеряют слышимые созвучия и звуки.
>
> — Клянусь богами, у них это выходит забавно: что-то они называют «уплотнениями» (*πυκνώματα*) и настораживают уши, словно ловят голоса из соседнего дома; одни говорят, что различают в середине какой-то отзвук (*ἠχώ*), и что это наименьший интервал, который можно измерить; другие возражают, уверяя, что звучания одинаковы, но и те и другие ценят уши выше ума.
>
> — Ты говоришь о тех добрых людях, что не дают струнам покоя и терзают их, накручивая на колки. Чтобы не затягивать всё это, говоря об ударах плектром, о том, как винят струны, отвергают их или кичатся ими, я прерву изображение и скажу, что имел в виду ответы не этих людей, а тех, кого мы только что решили расспросить о гармонии. Ведь они поступают совершенно так же, как астрономы: они ищут числа в слышимых созвучиях, но не подымаются до рассмотрения общих проблем и не выясняют, какие числа созвучны, а какие нет, и почему.

Составить по описанию Платона более-менее внятное представление о деятельности «гармоников» в его эпоху вряд ли возможно; не совсем понятно, что представляют собой «уплотнения» (*πυκνώματα*),[3] и в середине какого интервала с трудом различается на слух некий «отзвук».[4] Но «соизмерение интервалов на слух», о котором говорит Платон, вполне допустимо интерпретировать как их последовательное вычитание путём антифайресиса.

7. Музыкальная пропорция и среднее гармоническое

1. Постановка проблемы. Общую теорию музыкальной пропорции обычно начинают излагать с того, что дают определение среднего гармонического («первый член больше среднего и третий член меньше среднего на одну и ту же свою долю»), а потом показывают, что средние гармоническое и арифметическое образуют пропорцию с крайними членами. При таком порядке изложения у слушателя создаётся впечатление, что само определение среднего гармонического выглядит в сравнении с естественными определениями среднего арифметического и геометрического весьма надуманным; и

---

[3] Аристоксен в *Элементах гармоники* (31_{5-7}) даёт следующее определение плотного строя: «Я говорю о плотном (*τὸ πυκνόν*), когда внутри кварты два [нижних] интервала вместе образуют интервал, меньший остатка». См. ниже устройство хроматического и энгармонического тетрахордов по Архиту, где два нижних интервала тетрахорда в сумме меньше третьего, верхнего интервала.

[4] Вообще говоря, в античной музыкальной акустике «отзвуком» называлось явление резонанса, когда свободная струна откликается на звук струны, настроенной на октаву выше. Но в данном случае речь идёт скорее о делении «плотного интервала» на части.

остаётся непонятным, как идея среднего гармонического могла прийти кому-то в голову в первый раз.

Ниже рассматривается решение этой проблемы, основанное на изменении порядка возникновения понятий и придания ему естественной последовательности. Сначала мы обсудим общую идею обращения порядка интервалов внутри составного отношения, потому перейдём от этой идеи к частному случаю музыкальной пропорции, затем определим среднее гармоническое как обратное по отношению к среднему арифметическому в этой пропорции, и только под конец дадим его самостоятельное определение, не связанное со средним арифметическим. Также будут рассмотрены доводы в пользу того, что и исторический порядок возникновения этого понятия мог быть именно таким. Эти доводы связаны с определением трёх средних в трактате Архита *О музыке* и с тем названием, которое среднее гармоническое носило изначально.

2. Обращение порядка интервалов. Исходным пунктом построения теории музыкальной пропорции выступает возможность обращения порядка интервалов внутри их суммы. Если между пределами AB вставлено некоторое среднее C и интервал CA не равен интервалу BC, мы можем поменять интервалы CA и BC местами, вставив между AB такое среднее D, чтобы интервал DA был равен интервалу BC, а интервал BD был равен интервалу CA (рис. 10). (Заметим попутно, что середина E исходного интервала AB очевидным образом остаётся серединой нового интервала CD.)

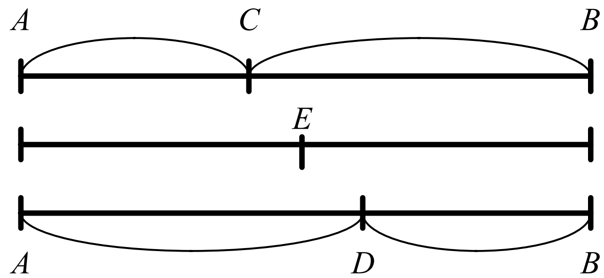

Рис. 10

3. Музыкальная пропорция. Теперь рассмотрим частный случай нашего общего построения, вставив между двумя величинами A и B (где $B > A$) их среднее арифметическое M, образующее с обеими величинами одинаковые разности d. Несложно понять, что при такой вставке верхний интервал $B : M$ будет большим, нежели нижний интервал $M : A$. Это легко доказывается с помощью процедуры последовательного взаимного вычитания («антифайресиса»). В самом деле, на первом шаге вычитания в обеих парах $B - M$ и $M - A$ получается одинаковая разность d. На втором шаге разность d вычитается из M и из A, — и ясно, что в A она уложится на один раз меньше, чем в M.

Теперь поменяем возникшие интервалы местами. Верхний интервал опустим вниз, отложив его от A до некоего H, которое и будет называться *средним гармоническим*. При этом нижний интервал окажется наверху, между H и B. Данным построением мы получаем так называемую *музыкальную пропорцию* $\frac{H}{A} = \frac{B}{M}$.

Можно сказать, что эта пропорция составляет самую сердцевину математической теории гармонии. НИКОМАХ ГЕРАЗСКИЙ во *Введении в арифметику* (II, 29, 1) говорит, что она является «совершеннейшей и полезнейшей для всякого продвижения в музыке и в учении о природе; и она одна из всех может называться гармонией в собственном истинном смысле».

4. Исходное название среднего гармонического. Понятно теперь, почему АРХИТ в трактате *О музыке* называет среднее гармоническое словом ὑπεναντία, «обратное». Всё дело в том, что это среднее получается обращением порядка интервалов, возникающих при вставке среднего арифметического. Приведём отрывок из трактата АРХИТА, сохранившийся в передаче ПОРФИРИЯ в *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* ($93_{6–17}$):

> Средних (μέσαι) в музыке три: первая — арифметическая, вторая — геометрическая, третья — обратная, называемая также гармонической. Арифметическая — когда три члена образуют пропорцию разностей: насколько первый больше второго, настолько второй больше третьего. В этой пропорции интервал между большими членами меньше, а между меньшими больше. Геометрическая — когда первый ко второму так же, как второй к третьему. Здесь интервал между большими равен интервалу между меньшими. Обратная, которую мы называем гармонической — когда первый член больше второго на такую свою долю, что и средний больше третьего на такую же долю третьего. В этой пропорции интервал между большими членами больше, а между меньшими меньше.

В. А. ЯНКОВ [1997, с. 232] указывает на то, что понимание гармонического среднего как обратного среднему арифметическому невозможно без точного знания, что такое пропорция. Однако более верным нам представляется утверждение, что само точное знание о пропорции возникает в рамках теории музыки уже после того, как вводятся понятия о трёх средних, выраженные на языке равенства и перестановки интервалов, когда среднее гармоническое вставляется не на слух, откладыванием такого же интервала, а путём точного отмеривания, когда интервалы выражаются отношениями чисел.

5. Характеристическое свойство среднего гармонического. Пока что мы определили среднее гармоническое как противоположное среднему арифметическому; теперь надо дать ему независимое определение, выразив среднее через крайние члены.

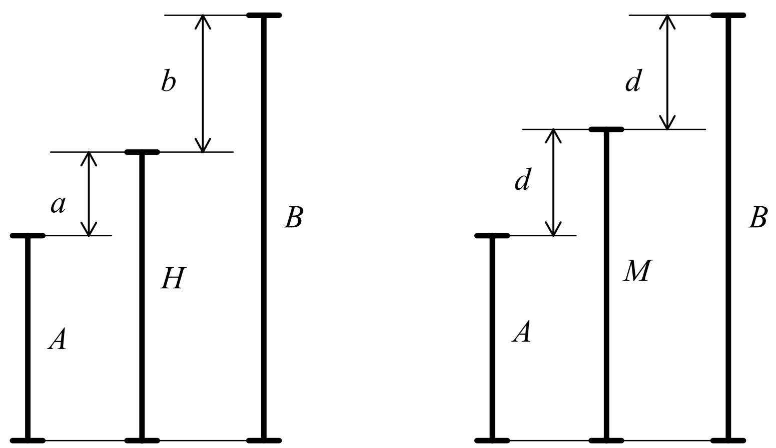

Рис. 11

Из пропорции $\dfrac{H}{A}=\dfrac{B}{M}$ получаем вычитанием $\dfrac{H-A}{A}=\dfrac{B-M}{M}$, то есть $\dfrac{a}{A}=\dfrac{d}{M}$. Далее удвоением получаем $\dfrac{a}{A}=\dfrac{2d}{2M}=\dfrac{a+b}{A+B}$. Тем самым $\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}$. Отсюда мы получаем самостоятельное определение среднего гармонического: «на какую часть меньшего члена средний член превосходит меньший, на такую часть большего члена больший член превосходит средний».

6. Геометрическое построение. Для того, чтобы построить среднее гармоническое между A и B, начертим отрезок ab и восстановим по одну сторону от него на его концах длины A и B как перпендикуляры. Затем построим перпендикуляр $A' = A$ по другую сторону от ab и соединим его конец с концом B. Проведённая линия пересекается с ab в точке c, которая делит отрезок ab пропорционально длинам A и B. Восстановим в c перпендикуляр H до пересечения с линией, соединяющей концы A и B (рис. 12). Нетрудно видеть, что H будет средним гармоническим между A и B.

Отсюда проистекает простая геометрическая теорема, находящая применение в теории центральной перспективы: отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и проходящий параллельно основаниям трапеции через точку пересечения диагоналей, является средним гармоническим между основаниями.

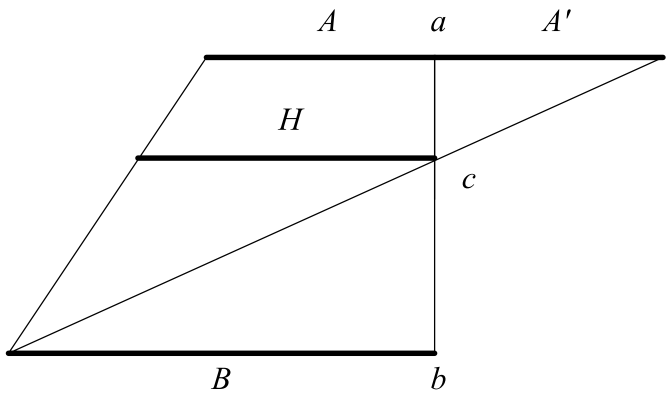

Рис. 12

8. Архит и деление октавы пополам

1. Деление октавы пополам. Разделить октаву пополам — значит найти среднее геометрическое между крайними членами, имеющими двойное отношение. Будучи переведённой на язык арифметики, эта задача сводится к отысканию чисел a и b, образующих непрерывную пропорцию $a : b = b : 2a$. Если члены этой пропорции перемножить крест-накрест, исходная задача превратится в задачу об отыскании двух квадратных чисел b^2 и a^2, одно из которых в два раза больше другого. Эта последняя задача была исследована кем-то из ранних пифагорейцев (возможно — Гиппасом), показавшим её неразрешимость.

Среди историков математики бытует мнение, что приём вставки музыкальной пропорции в данный интервал мог использоваться АРХИТОМ для вычисления последовательных приближений $\sqrt{N}$ как среднего геометрического между 1 и N. Идея состоит в том, чтобы вставить между 1 и N среднее арифметическое и среднее гармоническое; между этими средними — новые средние, и т. д.; нетрудно показать, что этот процесс очень быстро сходится.

2. Связь с «вавилонским алгоритмом». Надо сказать, что гипотеза о том, что АРХИТ применял такой алгоритм, не подтверждена никакими документальными свидетельствами. Возможно, что её источником послужило следующее сообщение ЯМВЛИХА в *Комментарии к «Арифметике» Никомаха* (118_{23}–119_{3}):

> Полагают, что она [музыкальная пропорция] — изобретение вавилонян, а к грекам пришла впервые через ПИФАГОРА. И ей пользуются многие из пифагорейцев, как, например, АРИСТЕЙ из Кротона, ТИМЕЙ из Локр, ФИЛОЛАЙ, АРХИТ из Тарента и многие другие, а впоследствии ПЛАТОН в *Тимее*.

Вавилоняне действительно умели находить последовательные приближения $\sqrt{N}$ с помощью способа, формально совпадающего с описанным выше; однако они исходили не из идеи образования музыкальной пропорции путём вставки средних, но из чисто геометрических соображений. Продемонстрируем вавилонский метод извлечения квадратного корня на примере задачи об отыскании стороны квадрата, равновеликого прямоугольнику с основанием 2 и высотой 1. Ясно, что эта сторона должна быть больше 1 и меньше 2; в качестве первого приближения возьмём их среднее арифметическое $^3/_2$; нетрудно видеть, что оно является избыточным. Образуем на основании $^3/_2$ новый прямоугольник площади 2; его высота равна $^4/_3$. Повторив этот процесс, найдём новые основание $^{17}/_{12}$ и высоту $^{24}/_{17}$. Ещё раз повторив процесс, найдём новые основание $^{577}/_{408}$ и высоту $^{816}/_{577}$, и так далее. (Вавилоняне производили свои вычисления в шестидесятеричной системе счисления, и на этом шаге получали результат 1;24,51,10, зафиксированный на клинописной табличке YBC 7289.)

3. Ещё раз об определении Архита. В приведённом выше определении среднего гармонического, которое даёт АРХИТ ТАРЕНТСКИЙ, употребляется весьма своеобразная терминология. Здесь не говорится ни о равенстве отношений (*λόγοι*), ни о числовой пропорции в её общем виде, — АРХИТ определяет среднее гармоническое на языке, предназначенном для описания того специального случая, когда две величины образуют между собой сверхчастное (*ἐπιμόριον*) отношение, выражающееся отношением двух соседних натуральных чисел.

При делении сверхчастного отношения на два отношения с помощью музыкальной пропорции новые возникающие отношения тоже будут сверхчастными; аналогичное деление интервала на три, четыре и более частей может быть произведено с помощью вставки последовательных сверхчастных отношений:

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)=\left(\frac{2m+2}{2m+1}\right)\cdot\left(\frac{2m+1}{2m}\right)$$
$$\left(\frac{m+1}{m}\right)=\left(\frac{3m+3}{3m+2}\right)\cdot\left(\frac{3m+2}{3m+1}\right)\cdot\left(\frac{3m+1}{3m}\right)$$
$$\left(\frac{m+1}{m}\right)=\left(\frac{4m+4}{4m+3}\right)\cdot\left(\frac{4m+3}{4m+2}\right)\cdot\left(\frac{4m+2}{4m+1}\right)\cdot\left(\frac{4m+1}{4m}\right)$$

9. Три способа деления тетрахорда по Архиту

1. Переход к другим сверхчастным отношениям. Расширение круга задействованных в теории сверхчастных отношений, произведённое АРХИТОМ, было делом чисто умозрительным. Возможно, что весь этот ход основывался на следующем соображении: в теории уже использованы сверхчастные отношения квинты 3 : 2, кварты 4 : 3 и целого тона 9 : 8, причём первые два соответствуют консонирующим интервалам, а третье — неконсонирующему; спрашивается, играют ли в общей теории какую-либо роль промежуточные сверхчастные отношения 5 : 4, 6 : 5, 7 : 6, 8 : 7?

Дополнительная проблема, связанная с описываемыми ниже конструктами, состоит в том, что даже интервалы 5 : 4 и 6 : 5 (так называемые *чистые большая и малая терция*) в античной музыкальной теории консонирующими не считались. Получить эти интервалы из октавы и квинты сложением и вычитанием невозможно. А это означает, что точное их откладывание при слуховой настройке считалось невозможным; такое откладывание можно было произвести только геометрически, при экспериментах со специальным инструментом — монохордом или каноном, представляющим собой линейку с закреплённой на ней струной, когда положение точки, в которой струна прижимается к линейке, определяется путём расчёта и отмеривания.

2. Вставка средних внутрь квинты и кварты. В результате вставки двух средних внутрь интервалов квинты и кварты образуются музыкальные пропорции, показанные на рис. 13. Мы видим, что при этом построении появляется шесть новых сверхчастных интервалов, четыре из которых характеризуются отношениями 5 : 4, 6 : 5, 7 : 6, 8 : 7, — теми самыми, о которых ставился вопрос в предыдущем пункте.

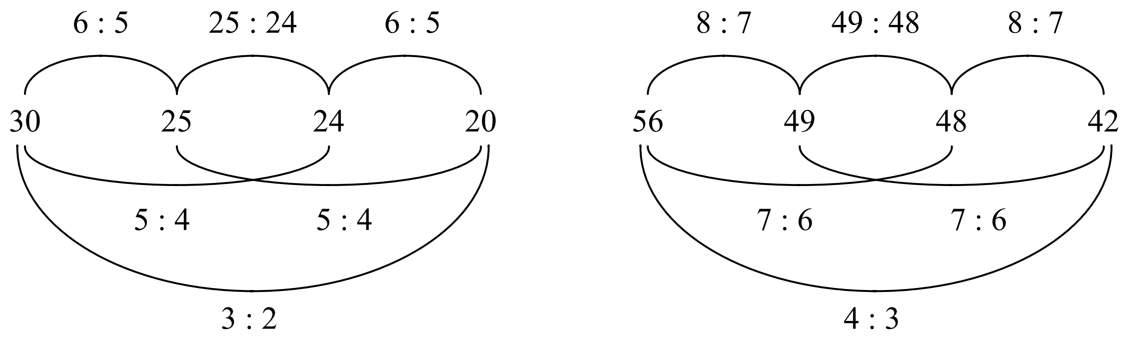

Рис. 13

Согласно гипотезе Б. Л. Ван дер Вардена (1943/59), именно такая вставка средних описана Платоном в заключительном предложении следующего фрагмента *Послезакония* (991ab):

> Второе удвоение идёт к середине; и [одно среднее] равным образом больше меньшего, как большее — среднего; другое же среднее одинаковыми долями крайних превосходит и превосходится (так в середину шести к двенадцати встают полуторное и эпитритное). Исходя из этих и обращаясь в середину между обоими (*τούτων αὐτῶν ἐν τῷ μέσῳ ἐπ᾽ ἀμφότερα στρεφομένη*), оно научило людей согласованности и соизмеримости ради ритмических игр и гармонии и даровала это блаженному хороводу Муз.

3. Три рода тетрахорда. Реальная музыкальная практика знала три музыкальных строя — диатонический, хроматический и энгармонический. В описанном выше диатоническом строе спуск от верхнего голоса тетрахорда к нижнему при пифагорейском способе настройки шёл по схеме «тон — тон — леймма», хотя некоторые гармоники считали такую настройку слишком жёсткой и рекомендовали несколько спускать третью сверху струну. В хроматическом строе вторая сверху струна опускалась заметно больше чем на тон, а третья делила оставшийся интервал примерно пополам; в энгармоническом строе интервал между первой и второй струнами был ещё больше, чем в хроматическом.

Эта реальная практика настройки инструментов и исполнения музыки опиралась исключительно на слуховой обычай, которому не было никакого дела до математических теорий. Однако с пифагорейской «теоретической» точки зрения обычай, относящийся к сфере чувственного восприятия, должен был быть ещё оправдан чистым умозрением. Как пишет об этом А. В. Ахутин (1976, с. 48), «при таком подходе истинное знание должно получаться в том случае, если удаётся реконструировать все данные наблюдений, исходя из чисто теоретических предпосылок». Отсюда возникала спекулятивная задача отыскания таких математических способов деления тетрахорда, которые могли бы «спасти явления».[5]

4. Тетрахорды Архита: реконструкция построения. Описание того, как Архит производил деление тетрахордов, сохранилось в *Гармонике* Птолемея (I, 13):

> Архит Тарентский, который из всех пифагорейцев больше всего занимался музыкой, пытается провести следование отношениям не только в созвучиях, но и в делениях тетрахордов, полагая, что соизмеримость избытков присуща музыке по природе. <...> Он устанавливает три рода: энгармонический, хроматический и диатонический, и каждый из них делит так. Ведомое (*ἑπόμενον*) отношение во всех трёх

[5] Выражение *σώζειν τὰ φαινόμενα* известно прежде всего в связи с обсуждением задач теоретической астрономии. Ссылаясь на *Историю астрономии* Евдема, Симпликий в *Комментарии к трактату Аристотеля «О небе»* (492_{31}–493_{4}) сообщает: «Допуская, что небесные тела движутся постоянным равномерным круговым движением, Платон предлагает математикам такую проблему: какие надо предложить круговые и совершенно правильные движения, чтобы иметь возможность спасти небесные явления». Установка на «спасения явлений» может быть прослежена также и в музыкальных изысканиях Архита.

родах он определяет как 28 : 27, среднее — в энгармоническом 36 : 35, в диатоническом 8 : 7, соответственно ведущее (ἡγούμενον) — в энгармоническом роде 5 : 4, в диатоническом 9 : 8. Второй от самого высокого звука в хроматическом роде он получает при посредстве занимающего то же положение в диатоническом; действительно, он утверждает, что второй звук от самого высокого в хроматическом относится к подобному ему в диатоническом как 256 к 243. Стало быть, он составляет эти тетрахорды согласно данным отношениям в таких первых числах: если мы обозначим самые высокие звуки тетрахордов 1512, а самые низкие, согласно эпитритному отношению, 2016, то последнее составит 28 : 27 от 1944. Этим числом будут выражаться во всех трёх родах вторые звуки от самого низкого. Что же касается вторых от самого высокого, то в энгармоническом роде получается 1890, которое относится к 1944 как 36 : 35, а к 1512 как 5 : 4; в диатоническом роде будет 1701, которое относится к 1944 как 8 : 7, а к 1512 как 9 : 8; в хроматическом роде будет 1792, которое относится к 1701 как 256 к 243.

Нетрудно понять, что нижний интервал 28 : 27, общий для всех трёх родов, представляет собой разность между интервалами 7 : 6 и 9 : 8. От верхнего звука будущего тетрахорда вниз откладывается квинта 3 : 2, а затем производится подъём вверх на интервал, характеризующийся отношением 7 : 6 (рис. 14).

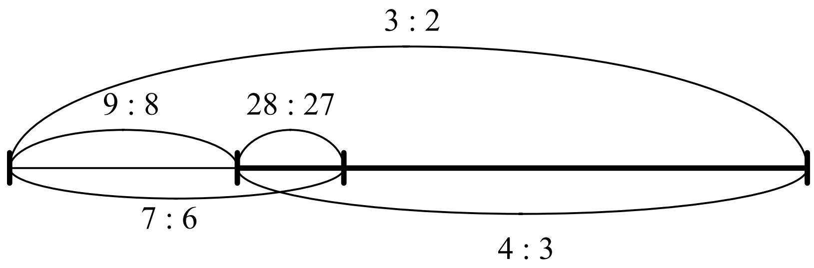

Рис. 14

Затем в каждом из видов производится построение второго звука сверху. При этом в энгармоническом роде сверху откладывается отношение 5 : 4, и в середине остаётся 36 : 35, в диатоническом роде сверху откладывается отношение 9 : 8, и в середине остаётся 8 : 7, а в хроматическом роде отношение 9 : 8 откладывается снизу (подъёмом на квинту и спуском на кварту), и вверху образуется отношение 32 : 27, а в середине остаётся отношение 243 : 224 (рис. 15).

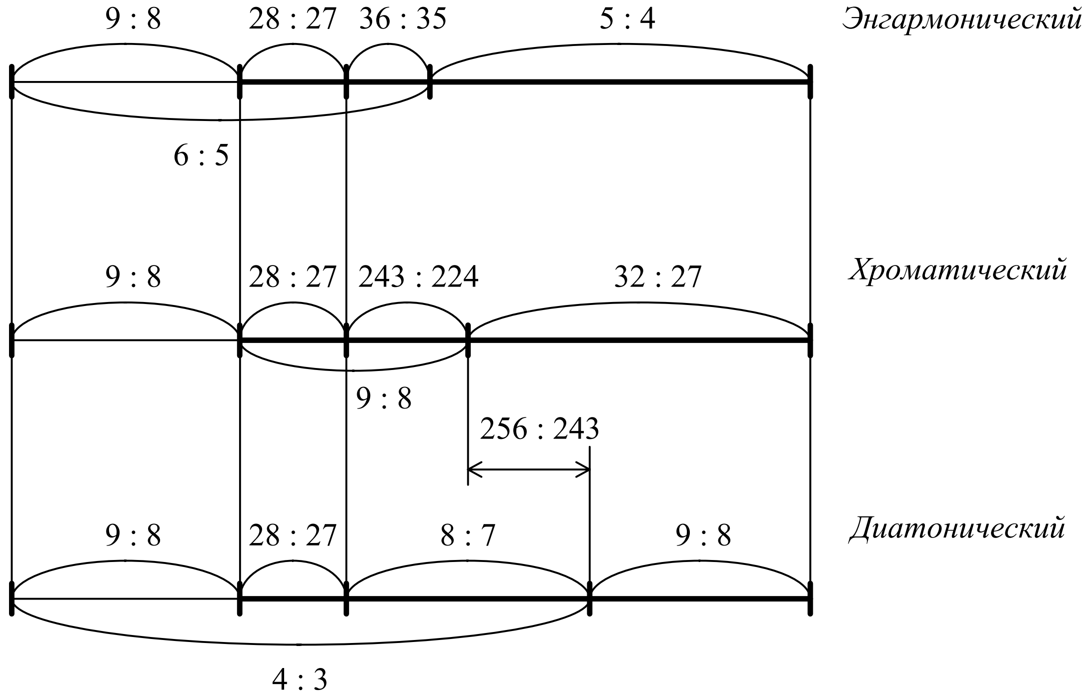

Рис. 15

Представляется правдоподобным, что при таком устройстве тетрахордов первым строился диатонический строй, квинту которого составляет каденция трёх последовательных сверхчастных интервалов 9 : 8, 8 : 7, 7 : 6. А хроматический и энгармонический строи образовывались с помощью хитрой манипуляции, понять теоретические основания которой вряд ли возможно.

В целом же эти спекуляции Архита вряд ли могли претендовать на какое-либо объясняющее значение. В этих построениях пифагорейская теория гармонии исчерпала свои возможности, и первоначальный научный энтузиазм, связанный с «удивительной эффективностью математики в науках о природе», в данной области исследований окончательно иссяк. С этого момента пифагорейское учение о гармонии из исследовательского проекта превратилось в учебную дисциплину, просуществовавшую в качестве одной из составных частей квадривиума без малого два тысячелетия.

5. Предел пифагорейской теории и проблема «теоретического слуха». Следует заметить, что реализация Архитом платоновско-пифагорейской программы «спасения явлений» не могла не натолкнуться на принципиальное различие между «теоретическим зрением» и «теоретическим слухом». Соответствующие суждения Аристоксена передаёт Порфирий в *Комментарии к «Гармонике» Птолемея* ($28_{9–19}$):

> Ведь музыка — не только логическое учение, но чувственное и логическое вместе; следовательно, тому, кто по-настоящему ею занимается, необходимо не упускать обе её стороны, ведущими же полагать чувственные явления, поскольку из них должен исходить разум. Геометр может беспрепятственно исследовать теорему, полагая окружность на доске ровной, и не заботиться о доверии к зрению относительно ровного, так как он исходит из логической материи. А музыкант не может должным образом изучить кварту, основываясь не на кварте, поскольку это сначала

должно быть согласовано с чувством, а потом уже разум должен быть присоединён к выявленному, так что если это неправильно схвачено чувством, разум тоже окажется в заблуждении относительно истины.

Библиография

Античная музыкальная эстетика. Вступ. очерк и собр. текстов А. Ф. Лосева. М.: 1960.

АРИСТОКСЕН. *Элементы гармоники*. Пер. и прим. В. Г. Цыпина. М.: МГДОЛК им. Чайковского, 1997.

АХУТИН А. В. *История принципов физического эксперимента от античности до XVII в*. М.: Наука, 1976.

ВАН ДЕР ВАРДЕН Б. Л. Пифагорейское учение о гармонии. В кн.: ВАН ДЕР ВАРДЕН Б. Л. *Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.* Пер. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959, с. 393–434.

ГЕРЦМАН Е. В. *Музыкальная Боэциана*. СПб.: Глаголъ, 1995.

ГЕРЦМАН Е. В. *Пифагорейское музыкознание. Начала древнегреческой науки о музыке*. СПб.: Гуманитарная академия, 2003.

ЛОСЕВ А. Ф. *История античной эстетики. Т. 5: Ранний эллинизм*. М.: Искусство, 1979.

СИМПЛИКИЙ. Комментарий к четырём книгам трактата Аристотеля «О небе». Комментарий ко второй книге. Пер. А. А. Россиуса. *Историко-философский ежегодник – 2004*, М.: Наука, 2005, с. 11–33.

ХАЙДЕГГЕР М. *Время и бытие*. М.: Республика, 1993.

ЦЫПИН В. Г. *Аристоксен. Начало науки о музыке*. М.: МГДОЛК им. Чайковского, 1998.

ЯМВЛИХ. *О пифагоровой жизни*. Пер. И. Ю. Мельниковой. М.: Алетейя, 2002.

ЯНКОВ В. А. Становление доказательства в ранней греческой математике (гипотетическая реконструкция). *Историко-математические исследования*, **2(37)**, 1997, с. 200–236.

BARBERA C. A. Arithmetic and geometric divisions of the tetrachord. *Journal of Music Theory*, **21**, 1977, p. 294–323.

BARBOUR J. M. The persistence of the Pythagorean tuning system. *Scripta Mathematica*, **1**, 1933, p. 286–304.

BARKER A. D. Methods and aims in the Euclidean *Sectio Canonis*. *Journal of Hellenic Studies*, **101**, 1981, p. 1–16.

BOWEN A. C. The foundations of early Pythagorean harmonic science: Architas, fragment 1. *Ancient Philosophy*, **2**, 1982, p. 79–104.

BOWEN A. C. Euclid's *Sectio canonis* and the history of pythagoreanism. In: *Science and philosophy in classical Greece*. NY: Garland, 1991, p. 167–187.

CROCKER R.L. Pythagorean mathematics and music. *Journal of Aesthetics and Art Criticism*, **22**, 1963, p. 189–198, 325–335.

Greek musical writings. 2 vols. Trans. A. Barker. Cambridge (Mass.): Cambridge Univ. Press, 1989.

LEVIN F. R. *The Harmonics of Nicomachus and the Pythagorean tradition*. University Park: American Philological Association, 1975.

LITCHFIELD M. Aristoxenus and empiricism: A reevaluation based on his theories. *Journal of Music Theory*, **32**, 1988, p. 51–73.

MCCLAIN E. G. *The Pythagorean Plato: Prelude to the song itself.* NY: Nicolas Hays, 1978.

Ptolemy Harmonics. Trans. J. Solomon. Leiden: Brill, 2000.

Sectio canonis. The Euclidean Division of the canon: Greek and Latin Sources. Transl. A. Barbera. Lincoln: Univ. of Nebraska Press, 1991.

TERPSTRA S. An introduction to the monochord. *Alexandria*, **2**, 1993, p. 137–166.

The Manual of Harmonics, of Nicomachus the Pythagorean. Trans. F. R. Levin. Grand Rapids, Phanes Press, 1994.

VAN DER WAERDEN B. L. Die Harmonielehre der Pythagoreer. Hermes, **78**, 1943, p. 163–199.

WINNINGTON-INGRAM R. P. Aristoxenus and the intervals of Greek music. *Classical Quarterly*, **26**, 1932, p. 195–208.