Золотое сечение в античной математике

А. И. Щетников

1. Постановка проблемы. Не будет преувеличением сказать, что без обсуждения вопроса о золотом сечении не обходится ни одна публикация, посвящённая взаимоотношениям математики и искусства. А число книг и журнальных статей по этой теме поистине неисчерпаемо.

Принято считать, что золотое сечение применялось древними архитекторами как принцип образования форм при постройке классических храмов; и некоторые исследователи античной архитектуры утверждают, что именно оно придаёт древним строениям столь возвышенный и законченный вид. Увлечённые своим предметом, историки архитектуры отыскивают золотое сечение в египетских пирамидах, в афинском Парфеноне, в римском Пантеоне и во множестве других древних построек. Находят золотое сечение и в скульптурах античных ваятелей.

Впрочем, ситуация с золотым сечением в античных пластических искусствах при непредвзятом взгляде на неё способна нас озадачить. Смущает прежде всего то, что до нашего времени не дошло ни одного античного текста, в котором эта математическая конструкция связывалась бы с архитектурой и ваянием, хотя бы косвенно. И это очень странно. Ведь если бы золотое сечение служило для древних греков математическим формообразующим принципом, об этом говорилось бы в десятках книг по «философской математике» — подобно тому, как во многих дошедших до нас книгах обсуждаются математические принципы музыкальной гармонии, открытые пифагорейцами.

В сохранившихся древнегреческих текстах золотое сечение рассматривается исключительно в связи с геометрической задачей построения правильного пятиугольника в планиметрии, а также икосаэдра и додекаэдра в стереометрии. Весь этот материал распределён по разным книгам «Начал» Евклида, созданным около 300 г. до н. э., но историки античной математики предполагают, что в более глубокой древности он входил в одну пифагорейскую книгу, посвящённую построению правильного пятиугольника и исследованию его свойств.

2. Золотое сечение как отношение линий в правильном пятиугольнике. На рис. 1 изображён правильный пятиугольник, в котором проведены все его диагонали, образующие правильную пятиконечную звезду. Нетрудно видеть, что на этом чертеже имеются три разновидности разных по размеру, однако подобных между собой равнобедренных треугольников. К первой разновидности относятся треугольники вида ACD, ко второй — треугольники вида CGB, к третьей — треугольники вида BFG.

⊗ Докажите подобие этих треугольников. Какие ещё подобные равнобедренные треугольники другой формы имеются на рис. 1?

Из подобия треугольников ACD и CGB непосредственно следует пропорция

$$AC : CD = CG : CB.$$

Но $CD = CG$; кроме того, $GB = AG$. Тем самым нашу пропорцию можно переписать в виде

$$AC : CG = CG : AG. \qquad (1)$$

Стало быть, отрезок AC разделён точкой G на две части, меньшую AG и большую GC, так что отношение целого к большей части равно отношению большей части к меньшей.

Деление на две части, при котором имеет место эта пропорция, называется *делением в крайнем и среднем отношении* или *золотым сечением*. Первое название принадлежит математикам древней Греции; второе появилось в эпоху Возрождения.

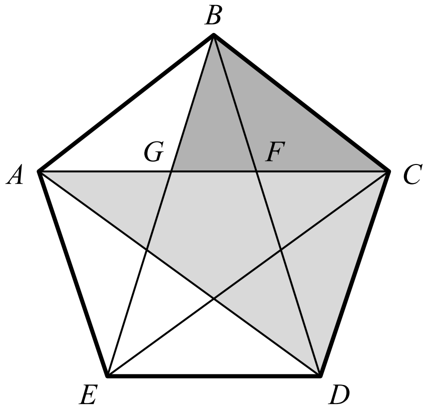

Рис. 1

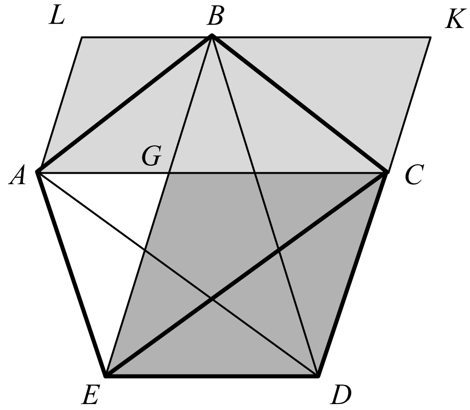

Рис. 2

Перемножив средние и крайние члены пропорции (1), мы получаем ещё одно важное соотношение

$$CG^2 = AC \times AG. \qquad (2)$$

Древнегреческие математики, в отличие от нас, никаких формул не писали, а получали и выражали это соотношение на языке геометрии: «если отрезок разделить в крайнем и среднем отношении, то квадрат на большей его части будет равновелик прямоугольнику, сторонами которого служат целый отрезок и меньшая его часть».

Аналогичное соотношение между площадями фигур можно получить, и не обращаясь к подобию и пропорциям. Построим параллелограмм $ACKL$, как показано на рис. 2. Несложно видеть, что он равен по площади ромбу $GCDE$: ведь каждая из этих двух фигур по площади вдвое больше треугольника ABC. При этом стороны параллелограмма — это целый отрезок AC и меньшая часть AG, сторона ромба — это большая часть GC, углы же при вершинах ромба и параллелограмма одинаковы.

3. Построение золотого сечения. Эта задача рассматривается в 11 предложении второй книги «Начал» Евклида в следующей формулировке: «Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке».

Чтобы понять приводимое Евклидом решение, начнём его поиск с предположения о том, что для данной прямой *AC* соответствующие квадрат *AFDB* и прямоугольник *FCHG* уже построены (рис. 3). Заметим, что прямоугольник *BDGE* будет равен по площади квадрату *ACHE*. Разделим отрезок *AE* пополам в точке *I* и преобразуем прямоугольник *BDGE* в равный ему гномон *LDKIAM*. Заметим, что квадрат *LDKN* равен сумме квадрата *MAIN* и гномона *LDKIAM*; но гномон *LDKIAM* равен квадрату *ACHE*; поэтому квадрат *LDKN* равен сумме квадратов *MAIN* и *ACHE*. Тем самым по теореме Пифагора его сторона равна гипотенузе прямоугольного треугольника *ACI*.

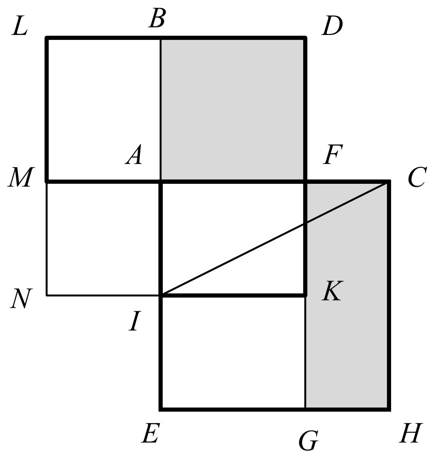

Рис. 3

⊗ Основываясь на доказательстве Евклида, опишите процедуру построения точки, делящий данный отрезок в среднем и крайнем отношении.

⊗ Разработайте способ построения правильного пятиугольника с данной стороной с помощью циркуля и линейки.

4. Доказательство несоизмеримости частей золотого сечения методом чётных и нечётных. Это доказательство строится по аналогии с известным доказательством несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. В дошедших до нас античных математических текстах такого доказательства нигде не приводится, однако у нас есть основания предполагать, что математикам пифагорейской школы оно могло быть известно.

Предположим, что части золотого сечения соизмеримы между собой, и пусть наибольшая общая мера укладывается в каждой части некоторое число раз a и b. Оба числа a и b не могут быть чётными одновременно, а иначе соответствующая им общая мера не будет наибольшей, так как обе части будут измеряться нацело и удвоенной мерой.

• Если меньшая часть будет чётной, а большая нечётной, то целое будет нечётным. Но тогда квадрат большей части будет нечётным, а произведение меньшего и целого будет чётным — противоречие.

• Если меньшая часть будет нечётной, а большая чётной, то целое будут нечётным. Но тогда квадрат большей части будет чётным, а произведение меньшего и целого будет нечётным — противоречие.

• Наконец, если обе части будут нечётными, то целое будет чётным. Но тогда квадрат большей части будет нечётным, а произведение меньшего и целого будет чётным — противоречие.

Отсюда следует заключить, что обе части золотого сечения не соизмеримы между собой (не имеют общей меры).

⊗ Докажите, что если две части некоторой величины несоизмеримы между собой, то они несоизмеримы и с целым; и если одна из частей несоизмерима с целым, то о на несоизмерима и с другой частью.

⊗ Восстановите доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата (или, что то же самое, сторон двух квадратов, один из которых в два раза больше другого по площади) методом чётных и нечётных чисел.

5. Доказательство несоизмеримости частей золотого сечения с помощью алгоритма Евклида. В древнегреческой математике известный по школьной программе приём применялся не только в арифметике для отыскания наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, но также и в геометрии — для отыскания наибольшей общей меры двух величин. Кстати сказать, Евклид не изобрёл его, но только описал; автор этого замечательного алгоритма, принадлежавший скорее всего к пифагорейской школе, нам неизвестен. Сами греки называли этот приём «антифайресисом»; в переводе на русский это слово означает «последовательное взаимное отнятие».

Итак, пусть нам даны два отрезка A и B ($A > B$), и мы хотим найти их наибольшую общую меру. Ясно, что если эта мера укладывается в A и B, то она укладывается также и в их разности $C = A - B$. Поэтому от пары величин (A, B) мы можем перейти к паре (B, C) и повторить для неё то же самое рассуждение. Если на каком-то шаге этой процедуры при очередном вычитании буте получена пара равных величин (Z, Z), то величина Z будет служить общей мерой для всех полученных ранее величин, в том числе и для величин в паре (A, B). Если же нам удастся доказать, что ни на каком шаге антифайресиса такой пары равных величин не возникнет, то придётся сделать вывод: исходные величины являются несоизмеримыми между собой, не имеющими общей меры.

Процедура антифайресиса представляется графически на схеме «отнятия квадратов», изображённой на рис. 4. Здесь сначала строится прямоугольник $A \times B$ с данными сторонами. Затем от этого прямоугольника отнимаются квадраты со стороной B, пока не останется прямоугольник $B \times C$, где $C < B$. От этого нового прямоугольника отнимаются квадраты со стороной C, и так далее. На нашем рисунке процедура последовательного отнятия завершилась на квадратах со стороной F. Эта сторона F и является общей мерой исходных отрезков A и B.

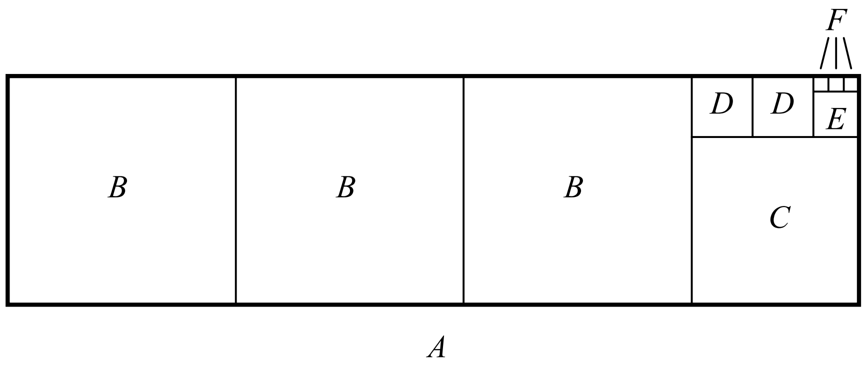

Рис. 4

Применим теперь алгоритм Евклида к случаю золотого сечения. Здесь на каждом шаге вычитание большей части из целого приводит появлению новой пары отрезков, имеющих между собой то же самое отношение, что и величины в исходной паре. Поэтому процедура последовательного взаимного вычитания ни на каком шаге не может быть завершена. При этом на каждом шаге последовательного отнятия разность оказывается меньше вычитаемого — этим свойством из всех иррациональных отношений обладает одно только золотое сечение (рис. 5).

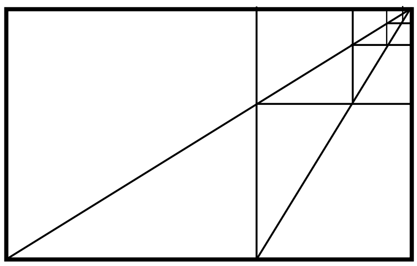

Рис. 5

⊗ Попробуйте доказать с помощью алгоритма Евклида несоизмеримость стороны и диагонали квадрата.

6. Связь золотого сечения и чисел Фибоначчи. Последовательностью Фибоначчи называется числовая последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , где каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, а первые два члена являются единицами. Известно, что рациональное отношение двух последовательных членов ряда Фибоначчи при удалении от начала ряда стремится к отношению золотого сечения. **[Попробуйте это доказать.]** Однако эта связь, равно как и самый ряд Фибоначчи, в античных текстах нигде не упоминаются.

И всё же описанный в нескольких античных сочинениях II–III в. н. э. древний пифагорейский алгоритм построения сторонних и диагональных чисел, дающих рациональные приближения для иррационального отношения стороны и диагонали квадрата, допускает аналогичный перенос на случай золотого сечения. Из доступных по этому вопросу публикаций я могу отослать к моей статье «Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие семенного логоса», опубликованной в № 1(8) журнала «Математическое образование» за 1999 г.; полный перевод сочинения Теона также готовится к изданию.

Следующий воображаемый текст я переделал из античного текста, автором которого является неопифагореец Теон, живший в городе Смирне во II в. н. э. Любые пояснения к нему были бы слишком обширными, поэтому я привожу его без комментария, надеясь, что заинтересованный читатель сам доберётся до указанной выше статьи. Итак, если бы кто-то из пифагорейских математиков написал сочинение про связь чисел Фибоначчи и золотого сечения, то отрывок из этого сочинения мог бы звучать так:

«Так как над всеми фигурами согласно наивысшему и семенному отношению начальствует единица, то и отношение среднего к крайнему отыскивается в единице. Возьмём две единицы; и пусть одна из них есть крайнее, другая же — среднее, ибо единица, будучи началом всех вещей, потенциально должна быть и крайним, и средним. Здесь целое равно сумме крайнего и среднего, то есть двум. И квадрат среднего на единицу меньше, чем прямоугольник на целом и меньшем. Пусть теперь целое становится средним, а среднее — крайним. И теперь будет крайнее 1, среднее 2, целое 3. Теперь квадрат среднего на единицу больше, чем прямоугольник на целом и крайнем. И опять, пусть целое становится средним, а среднее — крайним. Итак, крайнее будет 2, среднее 3, целое 5. Теперь квадрат среднего на единицу меньше, чем прямоугольник на целом и крайнем. И опять, пусть целое становится средним, а среднее — крайним. Итак, крайнее будет 3, среднее 5, целое 8. Теперь квадрат среднего на единицу больше, чем прямоугольник на целом и крайнем. И от дальнейшего прибавления, происходящего таким же образом, будет происходить подобная же смена: квадрат среднего будет то на единицу меньше, то на единицу больше, чем прямоугольник на целом и крайнем; при этом все части рациональны».

Иллюстрацией к этому тексту мог бы служить рис. 6, если только представить, что изображённые на нём «треугольники золотого сечения» дробятся всё мельче и мельче. Обратите внимание на то, что в боковой стороне большого равнобедренного треугольника сейчас уложено 13 сторон маленьких равнобедренных треугольников (из которых 8 являются боковыми сторонами, а остальные 5 —основаниями), а в его основании — 8 отрезков (из которых 5 являются боковыми сторонами, а остальные 3 — их основаниями). Нетрудно понять, что и при дальнейшем дроблении треугольника соответствующие числа всегда будут оставаться двумя соседними числами Фибоначчи.

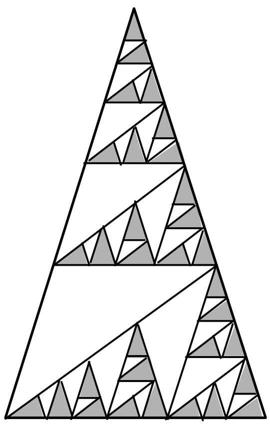

Рис. 6

Литература

ВОЛОШИНОВ А. В. *Пифагор: союз истины, добра и красоты*. М., Просвещение, 1993.

ЕВКЛИД. *Начала*. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. В 3 т. М., ГТТИ, 1949–50.

ЩЕТНИКОВ А. И. Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса». *Математическое образование*, 1999, №1(8), с. 84–94.

ЩЕТНИКОВ А. И. *Алгоритм Евклида и непрерывные дроби*. Новосибирск: АНТ, 2003.