Геометрия как форма свободного образования: истоки античной традиции

А. И. Щетников

1. Приступая к рассмотрению вопроса о корнях *геометрии как теоретической дисциплины*, вспомним о том, что древние греки называли *теорией* (θεωρία) священное посольство, отправляемое полисом для представительства на Олимпийских играх, для почитания богов в их святилищах или для вопрошания оракула; *теоремой* (θεώρημα) же называлось само божественное зрелище, раскрывавшееся перед очами послов.

Прокл в «Комментарии к Евклиду» (65_{11}) говорит о том, что Пифагор был первым, кто «преобразовал занятия геометрией в форму свободного образования (σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου), изучая сами её начала и рассматривая теоремы отвлечённо от материи и умозрительно». Он же сообщает (426_{6}) древнюю легенду о том, что Пифагор, открыв свою знаменитую теорему, «в благодарность принёс в жертву богам быка».

Если Пифагор и его последователи назвали свои геометрические открытия теоремами и благодарили за свои открытия богов, то это означает, что они видели в геометрических чертежах и связанных с этими чертежами рассуждениях свет раскрывавшейся перед ними божественной истины. Истина же понималась греками как ἀλήθεια, т. е. «непотаённость». В работе М. Хайдеггера «Учение Платона об истине» читаем: «Для непотаённого оказывается существенным не только то, что оно тем или иным образом делает доступным явное и держит его открытым в явлении, но и то, что непотаённое постоянно преодолевает ту или иную потаённость потаённого. Непотаённое должно быть вырвано из потаённости, в известном смысле быть похищено у неё. <...> Истина исходно означает вырванное из той или иной потаённости. Истина есть соответственно такое отвоёвывание путём преодоления потаённости. Потаённость при этом может быть разного рода: утайка, охрана, маскировка, сокрытие, искажение» [8, *353*].

2. В рамках современного математического мышления мы склонны оценивать значимость той или иной геометрической теоремы скорее по обширности и глубине следствий из неё (иначе говоря, по той «пользе», которую из неё можно извлечь), — чем по её самоценному внутреннему содержанию. Однако Пифагор вряд ли стоял на такой же точке зрения. О том, как в греческом мышлении соотносились между собой «польза» (она же — «выгода», «прибыль») и благо, доставляемое знанием, рассказывает анекдот, переданный Стобеем (II, 31, 114). Приступив к изучению геометрии и разобрав первую теорему, один юноша спросил у Евклида: «А какая мне будет выгода от этой науки?» Евклид подозвал раба и сказал: «Дай ему три обола, раз он хочет извлекать прибыль из учёбы».

Ключом к отношению пифагорейцев к созданной ими теоретической дисциплине может служить противопоставление *очевидных* и *неочевидных* теорем. Теорема о том, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, является очевидной. А вот теорема о равенстве вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу окружности, очевидной вовсе не является, — чтобы нам открылось её содержание, эту теорему действительно надо доказывать.

Есть основания полагать, что теоремами в собственном смысле этого слова Пифагор называл неочевидные утверждения, требующие преобразующего доказательства (ср. [6, *332*]). Именно сокрытая в чертеже возможность превратить неочевидный факт в очевидный сделала пифагорейскую геометрию теоретической дисциплиной в глазах её приверженцев. Заметим, что когда Аристотель в «Категориях» (14a39) ссылается на «чертежи» (διαγράμματα), Иоанн Филопон в своём комментарии на это место (193_5) пишет: «чертежи и теоремы (θεωρήματα) — это одно и то же».

3. Если составить список всех фактов школьной элементарной геометрии и попытаться разделить их на очевидные и неочевидные, мы увидим, что неочевидных фактов в этом списке совсем не так много. Древние греки считали, что всякое теоретическое знание имеет свою *цель*. Но тогда немногочисленные *неочевидные* теоремы оказываются в исходных установках пифагорейцев *целью* элементарной геометрии, а прочие геометрические предложения — средствами достижения этой цели.

Характерными неочевидными теоремами являются утверждения о том, что фигуры разной формы имеют равные площади. Теорема, рассматриваемая в первом параграфе учебника [9], была открыта пифагорейцами. Формулируется она так: «если через произвольную точку на диагонали прямоугольника провести две прямые, параллельные сторонам прямоугольника, то прямоугольные части, лежащие по бокам от диагонали, будут равны по площади» (рис. 1). Её доказательство основано на двух очевидных допущениях: (1) прямоугольник делится диагональю на две равные части; (2) если от равных величин отнять равные, то и остатки будут равны.

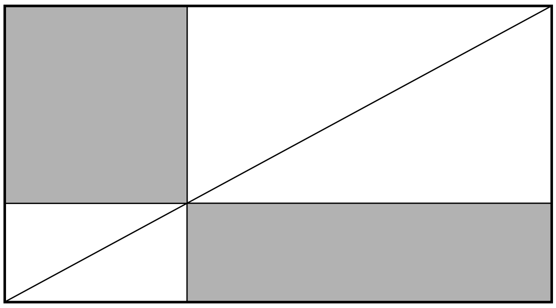

Рис. 1

4. Очевидные вспомогательные факты, используемые в доказательстве той или иной теоремы, принято называть *леммами*. Греческое слово λῆμμα означает взятые взаймы деньги, прибыль. Исходно леммы не доказывались перед основной теоремой, но были такими предложениями, которые в силу их очевидной истинности можно «взять взаймы», чтобы сразу же приступить к доказательству основной теоремы.

Г. Фройденталь [7] называет доказательство теоремы, производимое на основе принятых взаймы лемм, *локальным упорядочением* геометрического знания. Этому локальному упорядочению противостоит *глобальное упорядочение*, когда все теоремы последовательно выводятся из принятой системы аксиом. Идея глобального упорядочения является гораздо более высокой абстракцией по сравнению с идеей локального упорядочения, и поэтому учащимся правильно будет усвоить сперва последнюю идею, и только потом — первую. Как говорил Аристотель, «всякое обучение следует начинать не с того, что является первым само по себе, но с того, что является первым для учащихся».

5. Курс геометрии в целом призван не только прививать учащимся способность видеть очевидное и опираться на него в своих рассуждениях, но также и в воспитании культуры сомневаться в очевидности. А для этого нужен некоторый арсенал фактов очевидных, но неверных (см. [2]).

В любопытную ситуацию могут попасть учащиеся, измеряющие площади прямоугольников клетками тетради. Точка на диагонали обычно выбирается расположенной на пересечении тетрадных линий, однако она может не совпасть с этим пересечением, и тогда число клеток в рассматриваемых прямоугольниках окажется различным (рис. 2).

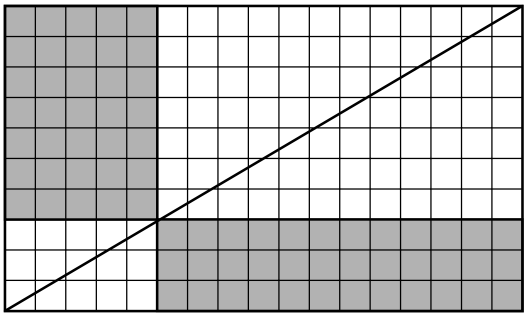

Рис. 2

6. Уже в самом начале изучения геометрии важно коснуться того факта, что опирающееся на общепринятые леммы демонстрационное доказательство хотя и ведётся на примере *конкретного* прямоугольника, но при этом оно применимо ко *всем* прямоугольникам сразу, — какую бы форму они не имели, и в каком месте диагонали не была бы поставлена исходная точка. В этом и состоит открытая Пифагором возможность рассматривать теоремы «*отвлечённо от материи и умозрительно*».

Платон в «Государстве» (510cd) говорит об этом так: «Те, кто занимается геометрией, вычислениями и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чёт и нечёт, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчёт ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих положений, они разбирают уже всё остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения... Но ведь когда они вдобавок пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертёж, а на те фигуры, подобием которых он служит. Выводы свои они делают только для квадрата самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили».

7. В качестве принципа, выражающего основную проектную идею разумного и понятного школьного курса геометрии, могут быть взяты следующие слова Д. Д. Мордухай-Болтовского: «Следует рассматривать всякое школьное доказательство как наложение двух доказательств — интуитивного и логического, взаимно усиливающих убедительность друг друга. Первое осуществляется *подвижной* моделью и ей соответствующим процессом воображения, второе развёртывает *силлогизмы*, приводящие к обоснованию этих операций. То доказательство лучше, где ясно выявляются оба этих слоя — *интуитивный* и *логический*» [3, I, *309*].

8. Завершим эти заметки, курьёзной, но педагогически действенной интерпретацией учения Платона о том, что *знание есть припоминание*. Предложим учащимися задачу такого уровня, чтобы они могли пытаться её решить, но мало кто получил бы решение. Затем покажем им решение и сравним со сделанными попытками. Через месяц, когда всё это будет прочно забыто, вновь предложим ту же самую задачу. Теперь при новой попытке решения учащиеся в своей поисковой работе будут пытаться вспомнить то, что происходило месяц назад. Если такие действия будут на разных задачах повторяться регулярно, то можно надеяться и на то, что учащиеся станут *вспоминать и то, чего им никто не показывал*, — а ведь это и есть цель всякого разумного обучения.

Литература

1. ВОЛОШИНОВ А. В. *Пифагор: союз истины, добра и красоты*. М.: Просвещение, 1993.
2. ДУБНОВ Я. С. *Ошибки в геометрических доказательствах*. М.: Наука, 1969.
3. ЕВКЛИД. *Начала*. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М., 1948–51.
4. ЖМУДЬ Л. Я. *Пифагор и его школа (ок. 530 – ок. 430 гг. до н. э.).* Л.: Наука, 1990.
5. ПРОКЛ. *Комментарии к первой книге «Начал» Евклида. Введение*. М.: ГЛК, 1994.
6. САБО А. О превращении математики в дедуктивную науку и о начале её обоснования. *Историко-математические исследования*, **12**, 1959, с. 321–392.
7. ФРОЙДЕНТАЛЬ Г. *Математика как педагогическая задача*. В 2 ч. М.: Педагогика, 1982–83.
8. ХАЙДЕГГЕР М. *Время и бытие*. М.: Республика, 1993.
9. ЩЕТНИКОВ А. И. *Геометрия: Учебник для 7–11 классов средней школы*. Новосибирск: АНТ, 2000.