Вторая книга “Начал” Евклида: её математическое содержание и структура

А. И. Щетников

Введение

Интерпретация содержания II книги “Начал” Евклида давно является предметом историко-научных дискуссий. Некоторые предложения этой книги могут быть истолкованы как геометрические иллюстрации к формулам сокращённого умножения или к приёмам решения квадратных уравнений. По этой причине они были отнесены Георгом Цейтеном [9] и Полем Таннери [19] к так называемой *геометрической алгебре древних*. Для работ историков математики этого направления характерна тенденция не только переводить рассуждения древнегреческих математиков с языка геометрических чертежей на язык алгебраических формул с целью “улучшения понимания”, но также и вычитывать в древнегреческой математике некий изначальный *алгебраический подтекст* (см. Б. Л. Ван дер Варден [3]; О. Нейгенбауэр [7]; в отечественной литературе этот подход наиболее ярко представлен в лекциях И. Г. Башмаковой [1], а также в “античных” главах “Истории математики” [6]).

Альтернативный подход к интерпретации II книги “Начал” развивается на протяжении последних тридцати лет, — особенно после того, как Сабетай Унгуру в полемической статье “О необходимости переписать историю греческой математики” [20] призвал историков математики отказаться от иллюзии понимания, возникающей за счёт перелицовывания античных математических текстов на современный лад, и начать понимать эти тексты через освоение тех *мыслительных средств*, с помощью которых греческие математики получали свои результаты.[1]

В настоящей статье я намереваюсь дать общий обзор II книги “Начал” Евклида. Этот обзор производится “сверху вниз”: в основном я буду рассматривать, как сложные геометрические теоремы разлагаются в процессе их доказательства на более простые элементы. Если же для некоторых элементарных предложений II книги не найдётся сложных теорем, в доказательстве которых они используются, то тем самым я буду ставить вопрос о реконструкции исходных теорем, в ходе доказательства которых эти простые элементы были выделены.

---

[1] В качестве примера такого подхода см. мою статью [11], где реконструируются рабочие средства арифметико-геометрического характера, с помощью которых Диофант Александрийский мог установить теоремы, изложенные в его книге “О многоугольных числах”. Заметим здесь, что значительная часть этих средств оказывается связанной с теоремами II книги “Начал” Евклида, анализу которых посвящена настоящая статья.

Блок первый: обобщение теоремы Пифагора

После того, как Пифагором или его учениками была доказана теорема о том, что в прямоугольном треугольнике квадрат на гипотенузе равновелик вместе взятым квадратам на катетах, естественно было попытаться обобщить эту теорему на случай непрямоугольных треугольников. Ясно, что квадрат стороны, лежащей против *тупого* угла, будет *больше* суммы квадратов двух других сторон, а квадрат стороны, лежащей против *острого* угла, будет *меньше* суммы квадратов двух других сторон. Возникает вопрос, на сколько он будет больше или меньше этой суммы.

Пусть роль гипотенузы играет сторона, лежащая против тупого угла (рис. 1). Достроим тупоугольный треугольник ABC до прямоугольного треугольника ABD. Квадрат на AB равен квадратам на AD, DB. Разрежем квадрат на DB на четыре части так, как это показано на чертеже. Теперь квадрат на AB равен квадратам на AD, DC, CB и двум прямоугольникам между CD и CB. Но квадраты на AD, DC дают в сумме квадрат на AC. Получается, что квадрат на AB равен квадратам на AC, CB и двум прямоугольникам между CD и CB.

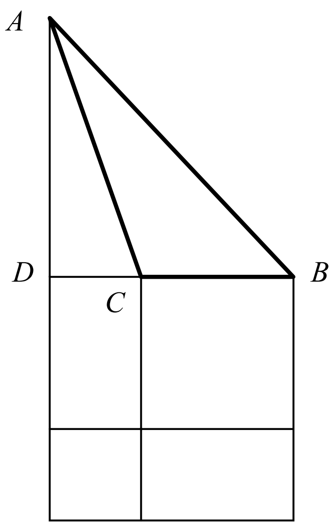

Рис. 1

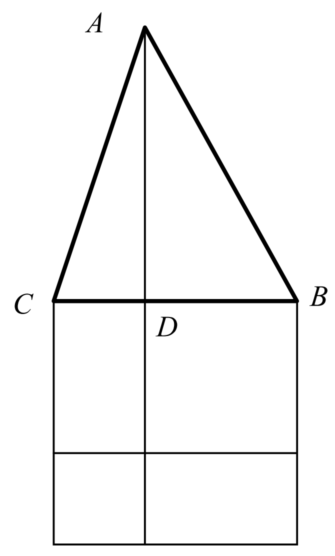

Рис. 2

Пусть теперь роль гипотенузы играет сторона, лежащая против острого угла (рис. 2). Опустим из A перпендикуляр AD на CB. Квадрат на AC равен сумме квадратов на AD, CD. Тем самым квадраты на AC, CB равны квадратам на AD, CD, CB. Но квадраты на CD и CB, наложенные друг на друга, равны квадрату на DB и двум прямоугольникам между CD и CB. Получилось, что квадраты на AC, CB равны квадратам на AD, DB и двум прямоугольникам между CD и CB. Но квадраты на AD, DB дают в сумме квадрат на AB. Тем самым квадраты на AC, CB равны квадрату на AB и двум прямоугольникам между CD и CB.

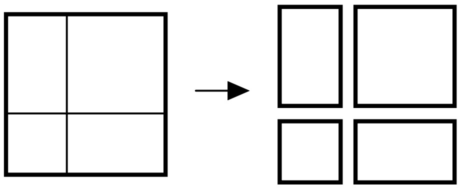

Рис. 3

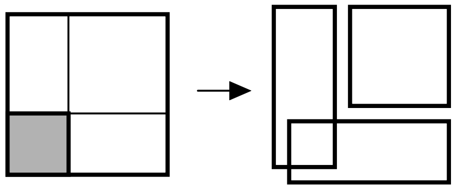

Рис. 4

Во II книге “Начал” доказанные теоремы содержатся в предложениях **12** и **13** (их оригинальные формулировки приведены ниже). При этом вспомогательные построения с разрезанием квадрата вынесены в отдельные предложения **4** и **7** (я ещё раз изобразил их схематически на рис. 3 и 4). По этой причине на чертежах к предложениям **12** и **13** вспомогательные построения не приводятся.

> **4.** Если прямая линия как-либо рассечена, то квадрат на всей прямой равен квадратам на отрезках вместе с дважды прямоугольником, заключённым между отрезками.

> **7.** Если прямая линия как-либо рассечена, то вместе взятые квадрат на всей и квадрат на одном из отрезков равны дважды взятому прямоугольнику, заключенному между всей прямой и упомянутым отрезком, и квадрату на другом отрезке.

> **12.** В тупоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей тупой угол, больше квадратов на сторонах, содержащих тупой угол, на дважды взятый прямоугольник, заключённый между одной из сторон при тупом угле, на которую падает перпендикуляр, и отсекаемым этим перпендикуляром снаружи отрезком при тупом угле.

> **13.** В остроугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей острый угол, меньше квадратов на заключающих острый угол сторонах на дважды взятый прямоугольник, заключённый между одной из сторон при остром угле, на которую падает перпендикуляр, и отсекаемым этим перпендикуляром внутрь отрезком при остром угле.

Если угодно, в можно видеть аналог формул сокращённого умножения для квадрата суммы и квадрата разности:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

О том, как предложения **4** и **7** применялись при доказательстве теорем “арифметики фигурных чисел”, см. мою статью [11]. Здесь же я хочу отметить, что эти предложения значимы и вне арифметико-алгебраического контекста — а именно, как фрагменты рассмотренных выше геометрических доказательств предложений **12** и **13**.

Блок второй: квадрирование прямоугольника, “золотое сечение” и родственные задачи

Одна из важных задач геометрии пифагорейцев состояла в преобразовании произвольного многоугольника в равновеликий квадрат (см. [8]). Ряд предложений I книги “Начал” позволяет превратить всякий многоугольник в равновеликий прямоугольник. Что касается квадрирования прямоугольника, то первоначальное решение этой задачи могло основываться на следующих фактах: (1) высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, является средним геометрическим между отрезками гипотенузы (это следует из подобия треугольников), а потому квадрат высоты равен прямоугольнику, сторонами которого являются отрезки гипотенузы; (2) вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

Тем самым квадрирование прямоугольника *ABCD* осуществлялось так (рис. 5): сторона *AB* продолжалась на отрезок *BE* = *BC*; получившийся отрезок *AE* делился пополам в точке *O*; на *AE* как на диаметре строился полукруг *AFE*; к *AE* восстанавливался перпендикуляр *BF* до пересечения с этим полукругом в *F*. Отрезок *BF* является стороной квадрата, равновеликого прямоугольнику *ABCD*.

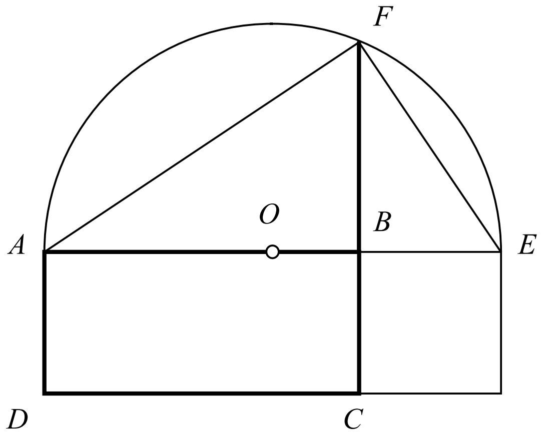

Рис. 5

Представленное решение основывается на понятии подобия и тем самым на общей теории пропорций. Чтобы избежать сложностей, связанных с применением этой теории к несоизмеримым величинам, это решение можно заменить другим, основывающемся только на равновеликости фигур. На стороне *OE* строится квадрат *OH*, и отрезки *BC* и *DC* продолжаются до пересечения со сторонами этого квадрата в *K* и *I* (рис. 6). Прямоугольник *AJ* равен прямоугольнику *BH*; поэтому прямоугольник *AC* равен гномону *OEHICJ*. Тем самым прямоугольник *AC* равен разности квадратов *OH* и *IJ*. Задача свелась к построению квадрата, равного разности двух квадратов; оно же выполняется с помощью теоремы Пифагора.

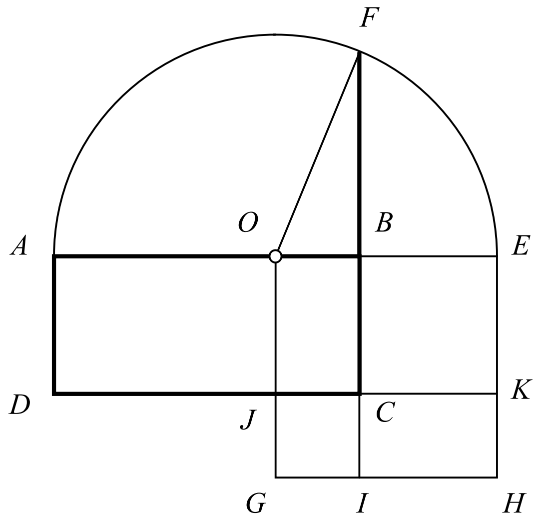

Рис. 6

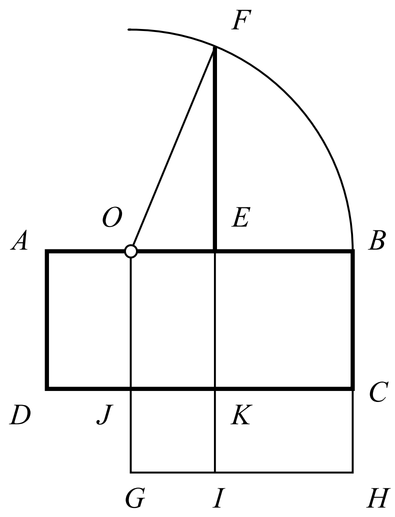

Рис. 7

Это же построение может быть выполнено несколько иначе (рис. 7). Отрезок $BE = BC$ откладывается внутрь AB, а затем AE делится пополам в точке O. Прямоугольник AJ равен прямоугольнику EI; поэтому прямоугольник AC равен гномону $OBHIKJ$ и тем самым равен разности квадратов OH и IJ.

Во II книге “Начал” рассмотренная задача решается в предложении **14**. Вспомогательные построения, произведённые на рис. 6 и 7 ниже прямой AB, описываются в предложениях **5** и **6**:

> **5.** Если прямая линия рассечена на равные и неравные отрезки, то прямоугольник, заключённый между неравными отрезками всей прямой, вместе с квадратом на отрезке между сечениями равен квадрату на половине.
>
> **6.** Если прямая линия рассечена пополам, и к ней по прямой приложена какая-либо другая прямая, то прямоугольник, заключённый между всей прямой с приложенной и самой приложенной, вместе с квадратом на половине равен квадрату на прямой, составленной из половины, и приложенной.

В предложении **14** Евклид решает задачу о квадрировании прямоугольника, основываясь на предложении **5**. Что касается предложения **6**, то оно используется в предложении **11**, где ставится и решается *задача о делении отрезка в среднем и крайнем отношении*. Исходно эта задача могла быть поставлена как составная часть задачи о построении правильного пятиугольника.

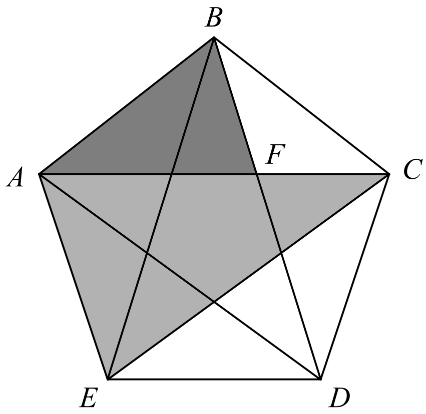

Рис. 8

На рис. 8 треугольники ABF и CEA подобны; поэтому $AC : AE = AF : FB$. Но $FB = FC$ и $AE = ED = AF$, поэтому $AC : AF = AF : FC$. Если перемножить средние и крайние члены этой пропорции, то будет $AF^2 = AC \times FC$. О построении такого сечения как раз и идёт речь в предложении **11**:

> **11.** Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

Поиск решения начинается с предположения о том, что соответствующие квадрат AD и прямоугольник FH построены (рис. 9). Заметим также, что весь прямоугольник BG будет равновелик квадрату AH. Разделим AE пополам в I и преобразуем прямоугольник BG в равный ему гномон $LDKIAM$ (рис. 10). Квадрат LK равен сумме квадрата MI и гномона; но гномон равен прямоугольнику BG и тем самым равен квадрату AH; поэтому квадрат LK равен сумме квадратов MI и AH. Тем самым его сторона DK равна гипотенузе CI прямоугольного треугольника ACI.

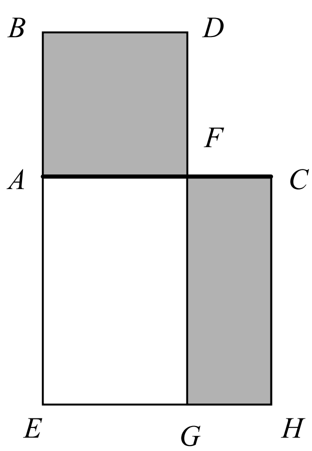

Рис. 9

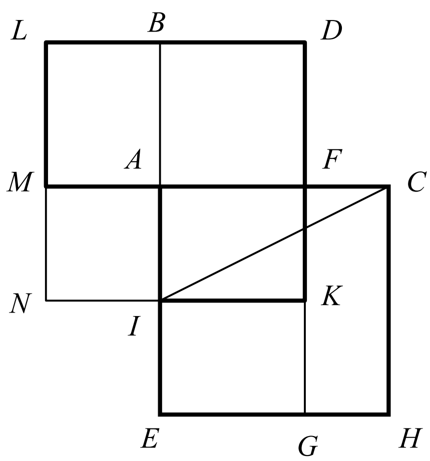

Рис. 10

Родство между предложениями **5** и **6** может быть подчёркнуто с помощью схемы, изображённой на рис. 11. Здесь оба варианта одной схемы устроены совершенно одинаково, — а каждое из предложений получается одним из двух возможных положений прямоугольника, преобразуемого в гномон.

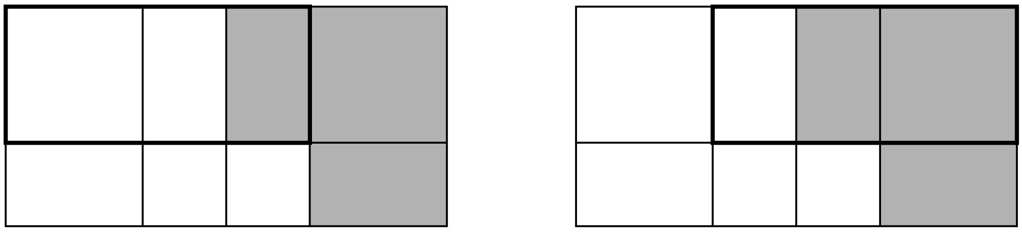

Рис. 11

Если угодно, в предложениях **5** и **6** можно видеть аналог формул сокращённого умножения для разности квадратов. Впрочем, формула в обоих случаях будет одной и той же, а предложений всё таки два — хотя они несомненно родственны друг другу.

Предложения **5** и **6** допускают ещё одно толкование. А именно, им соответствуют следующие задачи:

• Рассечь данную прямую линию так, чтобы прямоугольник, заключённый между частями, был равен данному квадрату.

• Данную прямую линию продолжить так, чтобы прямоугольник, заключённый между всей прямой с приложенной линией и самой приложенной линией, был равен данному квадрату.

Первая задача называется также задачей о приложении площади с недостатком, а вторая — задачей о приложении площади с избытком. На языке алгебры аналогичные задачи формулируются так:

• Известна сумма двух чисел и их произведение; найти сами числа.

• Известна разность двух чисел и их произведение; найти сами числа.

Эти задачи были известны ещё в древнем Вавилоне (см. [3], [7]). Их стандартное решение основывается на том, что два неизвестных заменяются одним (в первой задаче — полуразностью искомых чисел, во второй задаче — их полусуммой), а затем применяется формула, превращающая произведение разности и суммы двух величин в разность квадратов этих величин:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Сегодня эту формулу доказывают алгебраически — раскрытием скобок. Но в древних математических культурах, где не имелось развитой операторной алгебраической символики, она могла доказываться лишь геометрически.

Явный параллелизм геометрических и алгебраических задач приводит к дискуссии о том, какая постановка задач была первичной в древнегреческой математике (см. статью С. Унгуру [20], с. 94–95, где сопоставляются подходы Б. Л. Ван дер Вардена [3], считавшего предложения **5** и **6** заготовками для решения “алгебраических” задач на приложение площадей, и А. Сабо [18], настаивавшего на том, что эти два предложения служили полуфабрикатами для **14** и **11** предложений, имеющих чисто геометрический характер.). Однако никаких свидетельств и доводов, придающих окончательный перевес одной из двух возможных точек зрения, не имеется. Так что мы вполне можем считать обе задачи — геометрическую и арифметическую — автономными, хотя и изоморфными друг другу. (Связь предложений **5** и **6** с теорией конических сечений [17] вряд ли была исходной для их формулирования. Возможную связь этих предложений с доказательствами несоизмеримости квадратных корней обсуждалась в работах [3], [13]; об этом речь пойдёт ниже.)

Блок третий: Феодорово доказательство несоизмеримости $\sqrt{N}$: 1

ЕВКЛИД формулирует предложение **8** второй книги *Начал* следующим образом:

> **8.** Если прямая линия как-либо рассечена, то учетверённый прямоугольник, заключённый между всей прямой и одним из отрезков, вместе с квадратом на оставшемся отрезке равен квадрату, надстроенному на всей прямой и упомянутом отрезке, как на одной прямой.

На рис. 12 прямая линия *AB* рассечена в точке *C* и продолжена на *BD* = *CB*. Квадрат на *AD* состоит из четырёх квадратов на *CB*, четырёх прямоугольников между *AC* и *CB*, и одного квадрата на *AC*. Объединив квадраты и прямоугольники в пары, получим четыре прямоугольника между *AB* и *CB*, что доказывает теорему. Ещё один вариант её доказательства приведён на рис. 13. Формулировку здесь придётся несколько усложнить, — зато демонстрация окажется более простой.

Предложение **8** не используется ЕВКЛИДОМ ни в одном из последующих предложений “Начал”. Однако оно вряд ли служило простым упражнением на перекладывание частей чертежа. Поэтому естественно задаться вопросом, зачем оно было кем-то сформулировано и доказано.

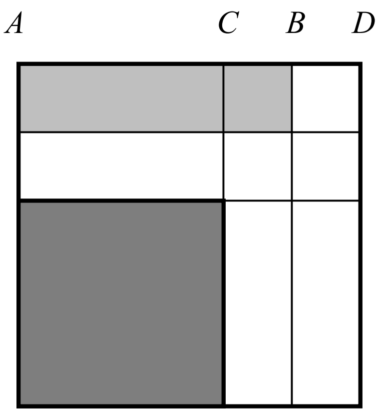

Рис. 12

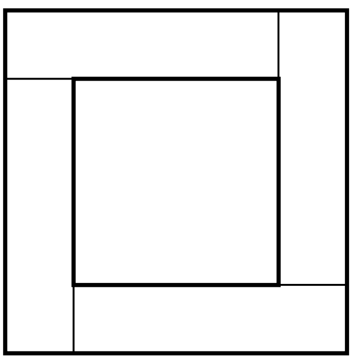

Рис. 13

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим фрагмент 147d–148b диалога ПЛАТОНА “Теэтет”. В диалоге участвуют СОКРАТ, юноша ТЕЭТЕТ и известный геометр ФЕОДОР КИРЕНСКИЙ. Интересующий нас отрывок начинается с реплики ТЕЭТЕТА:

> Вот ФЕОДОР начертил нам нечто о сторонах квадратов (περὶ δυνάμεών) и показал, что стороны трехфутового и пятифутового квадратов по длине несоизмеримы со стороной однофутового квадрата. Так, перебирая квадраты один за другим, он дошел до семнадцатифутового. Тут его что-то остановило.

Из этой реплики следует, что метод ФЕОДОРА не давал единого доказательства для всех неквадратных чисел сразу (квадраты приходилось “перебирать”), и он наталкивался на какое-то препятствие при $N = 17$. Реконструкция этого метода, предложенная ЖАНОМ ИТАРОМ ([16], с. 33–39) основана на теоретической арифметике чётных и нечётных чисел (теории делимости на 2), соответствуя характеру античной арифметики времён ПЛАТОНА.[2] Замечательно, что восстановленный ИТАРОМ метод впервые не работает именно для $N = 17$.

ФЕОДОР сразу же начинает свою демонстрацию со случая $N = 3$, потому что доказательство для $N = 2$ (несоизмеримость стороны и диагонали квадрата) было получено ранее пифагорейцами. Это доказательство изложено в Приложении к X книге *Начал* ЕВКЛИДА; его детали упоминаются АРИСТОТЕЛЕМ в “Первой аналитике” (41a27–33). Возьмём два квадрата, один из которых в два раза больше другого по площади. Предположим, что стороны этих квадратов соизмеримы между собой; пусть их наибольшая общая мера укладывается b раз в стороне двухфутового квадрата и a раз в стороне однофутового квадрата. Числа a и b не могут быть оба чётными (тогда общая мера не будет наибольшей). Имеет место соотношение $b^2 = 2a^2$, и тем самым $b^2 \to b$ будут чётными. Положив $b = 2c$, получим $2c^2 = a^2$, но тогда $a^2 \to a$ будут чётными, что противоречит исходному требованию.

Аналогичные рассуждения можно проделать и для прочих чётных неквадратных N. При этом N может либо быть *чётно-нечётным* (то есть таким чётным числом, половинки которого суть нечётные числа),[3] либо допускать двойное деление пополам (и быть либо *нечётно-чётным*, либо *чётно-чётным*).

Пусть $N = 2M$, где M нечётно. Тогда $b^2 = 2Ma^2$, и тем самым $b^2 \to b$ будут чётными. Положив $b = 2c$, получим $2c^2 = Ma^2$, но тогда $Ma^2 \to a^2 \to a$ будут чётными. Получи-

---

[2] ПЛАТОН в своих диалогах неоднократно определял арифметику как «учение о чётных и нечётных числах, рассматриваемых безотносительно к их величине» (см., к примеру, “Горгий” 451bc). Фрагмент этого учения содержится в предложениях 21–36 IX книги “Начал”, где излагаются теоремы о суммах и произведениях чётных и нечётных чисел, а затем доказывается теорема о совершенных числах.

[3] См. схолии к 7–10 определениям VII книги “Начал”: “Пифагорейцы делили числа на чётные и нечётные; чётные же — на чётно-чётные, чётно-нечётные и нечётно-чётные. Чётно-чётным они называли число, которое делится пополам вплоть до единицы, чётно-нечётным — то, которое сразу же после первой дихотомии оказывается далее неделимым, например 10, разделенное на 5 и 5, а нечётно-чётным — то, которое допускает большее число делений, например 12”. Ср. НИКОМАХ ГЕРАЗСКИЙ, “Введение в арифметику” (книга I, глава 7); ОЛИМПИОДОР, “Комментарий к *Горгию*” (4. 8). У самого ЕВКЛИДА этим же терминам придано несколько иное значение.

лось, что оба числа b и a будут чётными, что противоречит требованию, чтобы соответствующая этим числам общая мера была наибольшей.

Пусть теперь $N = 4N'$. Тогда $b^2 = 4N'a^2$, и тем самым $b^2 \to b$ будут чётными. Положив $b = 2c$, получим $c^2 = N'a^2$. Тем самым вопрос свёлся к исследованию соизмеримости сторон N'-футового и однофутового квадратов. Если N' делится на 4, то будет сделано ещё одно понижение $N' = 4N''$, и т. д. до тех пор, пока делимость на 4 не прекратится; если N' является чётно-нечётным, мы приходим к случаю, уже рассмотренному выше. Остаётся случай, когда одно из чисел в последовательности N, N', N'', и т. д. является нечётным.

Доказательство для этого последнего случая основано на следующей теореме: *всякое нечётное квадратное число за вычетом единицы делится на четыре гетеромекных числа, и тем самым на восемь треугольных чисел* (рис. 14).[4]

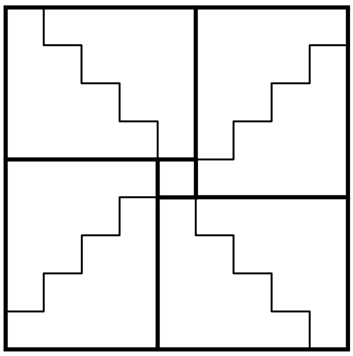

Рис. 14

Возьмём два квадрата, один из которых в N раз больше другого (где N — нечётное неквадратное число). Предположим, что их стороны соизмеримы; пусть их наибольшая общая мера укладывается b раз в стороне трёхфутового квадрата и a раз в стороне однофутового квадрата. Числа $a \to a^2 \to b^2 \to b$ имеют одинаковую чётность. Но a и b не могут быть оба чётными: ведь тогда соответствующая общая мера сторон не будет наибольшей. Поэтому a и b должны быть оба нечётными. Но тогда можно положить $a^2 = 8\Delta + 1$, $b^2 = 8\Delta' + 1$ (где Δ и Δ' — некоторые треугольные числа), что даёт соотношение

$$8\Delta' + 1 = N(8\Delta + 1). \quad (1)$$

Если $N = 3$, то тогда (1) принимает вид

$$8\Delta' + 1 = 3(8\Delta + 1) \;\Rightarrow\; 4\Delta' = 12\Delta + 1.$$

[4] *Гетеромекными* назывались прямоугольные числа, стороны которых разнятся на единицу. Поскольку гетеромекное число образуется произведением чётного и нечётного сомножителей, само оно является чётным. Его половинки могут быть представлены в виде треугольных чисел, получаемых суммированием последовательных натуральных чисел, начиная с единицы. Указанную теорему упоминают Диофант Александрийский в *Арифметике* (книга IV, задача 38) и Ямвлих во *Введении в Никомахову арифметику* (90. 18–19)

Но последнее соотношение абсурдно, поскольку в нём чётное число равно нечётному. Поэтому мы заключаем, что стороны однофутового и трёхфутового квадратов несоизмеримы между собой.

Аналогичные абсурдные соотношения получаются и для $N = 5, 7, 11, 13, 15$. В случае же $N = 17$ соотношение (1) принимает вид

$$8\Delta' + 1 = 17(8\Delta + 1) \;\Rightarrow\; \Delta' = 17\Delta + 2.$$

Но никакого противоречия здесь не содержится, так как треугольные числа могут быть и чётными, и нечётными.

Реконструкция Ж Итара существенно углубляет наши представления о ранней греческой математике. Но всё же она выглядит “слишком алгебраической”, будучи основанной на преобразовании не чертежа, но формулы (1). Схожи с ней в этом отношении и другие варианты этой реконструкции, предложенные впоследствии В. Кнорром [15] и Р. Л. МакКэйбом [16].

Ниже я модифицирую реконструкцию Итара на основе предложения **8**, сделав её “более геометрической”. Все частичные доказательства для конкретных N будут вестись на чертеже, изображённом на рис. 12.

Вновь рассмотрим случай $N = 3$, начиная с того пункта рассуждения, где мы пришли к выводу, что оба числа a и b должны быть нечётными. Если так, их разность будет чётным числом. Пусть квадрат на AD равен трём квадратам на AC. Тогда их разность-гномон будет в два раза больше квадрата на AC. Но эта разность делится на четыре одинаковых продолговатых числа (поскольку общая мера сторон укладывается в отрезке CD чётное число раз). Получается, что *нечётный* квадрат на AC равен *удвоенному* продолговатому числу, что абсурдно. Тем самым следует заключить, что стороны исходных квадратов несоизмеримы.

Покажем теперь на той же самой схеме, как строится рассуждение при исследовании 17-футового квадрата. Оба искомых числа a и b опять должны быть нечётными; гномон будет в 16 раз больше меньшего квадрата. Гномон имеет чётную ширину CD и делится на четыре одинаковых продолговатых числа со сторонами AB и CB. Эти стороны имеют противоположную чётность, поскольку их разность AC является нечётной. Поэтому продолговатые числа будут чётными, и тем самым гномон будет делиться на восемь равных частей. Получается, что удвоенный меньший квадрат (чётное число) равен одной восьмой части гномона. Но ничто не запрещает этой части также быть чётной. Противоречия не возникает. Стало быть, для числа 17 “метод чётных и нечётных” не работает.

Блок четвёртый: процедура антифайресиса и её приложение к доказательству несоизмеримости $\sqrt{2}$: 1

Несоизмеримость двух величин доказывалась греческими математиками с помощью двух основных групп методов. Методы первой группы основывались на специальных (чётные и нечётные числа) или общих теориях делимости. В методах второй группы использовалась процедура поиска наибольшей общей меры двух величин путём их *последовательного взаимного вычитания*.

Пусть даны две величины $A > B$. Будем вычитать мерку B из величины A до тех пор, пока не получится остаток $C < B$. Будем затем вычитать мерку C из величины B до тех пор, пока не получится остаток $D < C$. Если на каком-нибудь шаге мерка будет отнята без остатка, то эта последняя мерка будет наибольшей общей мерой двух исходных величин. Но возможны и такие ситуации, когда шаги последовательного вычитания будут повторяться, не прекращаясь. А именно (“Начала” X, 2),

> Если для двух неравных величин при постоянном взаимном вычитании меньшей из большей остаток никогда не будет измерять своего предшествующего, то величины будут несоизмеримы.

Историками математики были предложены две основные реконструкции *антифайретического* доказательства несоизмеримости сторон A и B двух квадратов, один из которых в два раза больше другого по площади (или, что то же самое, о несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали).

Первая реконструкция представлена на рис. 15. Левый вариант чертежа принадлежит Георгу Цейтену [9], правый — Дэвиду Фаулеру [12]. Вычитая из диагонали D сторону S, мы получаем пару отрезков $S > S'$. Вычитая S' из S, мы вновь получаем пару отрезков $S' < D'$. Легко видеть, что S' и D' снова являются стороной и диагональю меньшего квадрата. Последовательное взаимное вычитание исходных величин будет постоянно приводить к одной и той же ситуации, поэтому оно никогда не закончится. Поэтому приходится сделать вывод о том, что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы друг с другом.

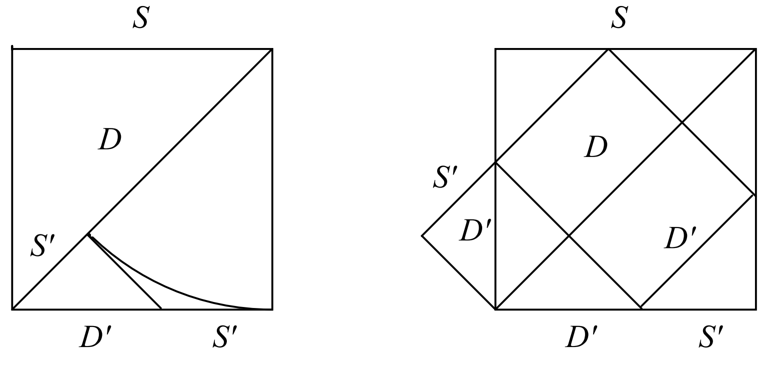

Рис. 15

Вторая реконструкция, принадлежащая Б. Л. ВАН ДЕР ВАРДЕНУ [3] и представленная на рис. 16, основывается на **6** предложении “Начал” ЕВКЛИДА.[5] Двухфутовый квадрат со стороной D и однофутовый квадрат со стороной S наложены здесь друг на друга. Их разность образует однофутовый гномон. Развернув гномон в прямоугольник, мы получим соотношение

$$(D + S) \times S' = S \times S,$$

дающее геометрическую пропорцию

$$(D + S) : S = S : S'.$$

Но если D соизмеримо с S, то и $(D + S)$ соизмеримо с S. Тем самым, начав последовательное вычитание отрезков $(D + S)$ и S, мы на первом же шаге получим пару отрезков S и S', имеющих то же самое отношение, что и исходные. А отсюда можно заключить, что отрезки $(D + S)$ и S {и тем самым D и S} несоизмеримы.

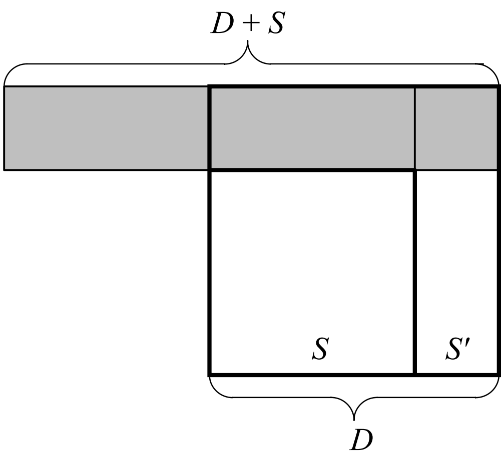

Рис. 16

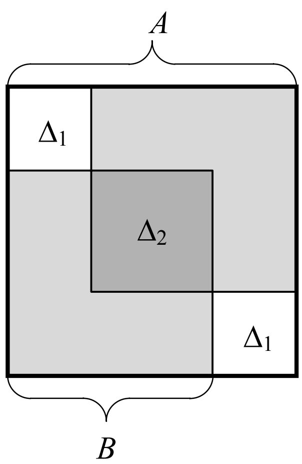

Рис. 17

Первая реконструкция устроена весьма естественно. Проблема состоит в том, что она очень сильно усложняется для $N > 2$ (См. построения для случая $N = 3$, приводимые М. Я. ВЫГОДСКИМ [4]). Вторая же реконструкция выглядит более искусственной. Зато она допускает несложное обобщение на случай произвольного неквадратного N. Что касается реконструкции, предлагаемой в настоящем разделе, то она отличается от рассмотренных выше большей “непосредственностью”.

Возьмём двухфутовый и однофутовый квадраты и наложим их друг на друга (рис. 17). Получившуюся разность сторон обозначим Δ_1. Вычтем Δ_1 из стороны однофутового квадрата, вложив ещё один однофутовый квадрат в противоположный угол двухфутового квадрата. Новую разность обозначим Δ_2. Два однофутовых квадрата в сумме дают двухфутовый квадрат; поэтому их перекрытие равно недопокрытию двухфутово-

---

[5] Д. ФАУЛЕР [13] рассматривает обобщения этой реконструкции для отношения $\sqrt{M} : \sqrt{N}$.

го квадрата. Тем самым квадрат на Δ_2 равен двум квадратам на Δ_1. Дальнейшее взаимное вычитание Δ_1 и Δ_2 будет воспроизводить исходную ситуацию, и поэтому оно никогда не будет завершено. Тем самым приходится заключить, что стороны двухфутового и однофутового квадратов несоизмеримы по длине.

Применённый приём находится в весьма близком родстве с формулировками предложений **9** и **10** второй книги “Начал”.[6]

> **9.** Если прямая рассечена на равные и на неравные отрезки, то квадраты на неравных отрезках всей прямой вдвое больше квадрата на половине вместе с квадратом на отрезке между сечениями.
>
> **10.** Если прямая линия рассечена пополам, и к ней по прямой приложена какая-либо другая прямая, то квадрат на всей прямой вместе с приставленной и квадрат на приставленной вдвое больше квадрата на половине и квадрата на половине вместе с приставленной.

Пользуясь предложением **9**, мы прикладываем новый меньший квадрат к уже построенному (рис. 18). Пользуясь предложением **10**, мы откладываем Δ_1 внутрь меньшего квадрата (рис. 19). [7]

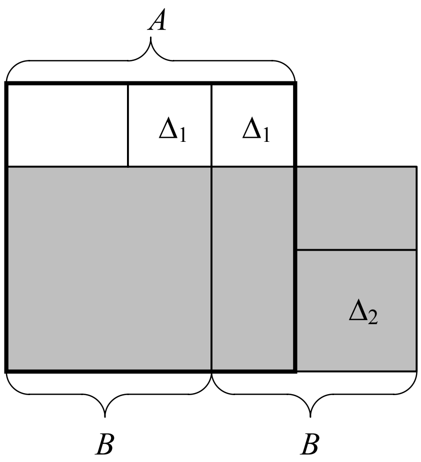

Рис. 18

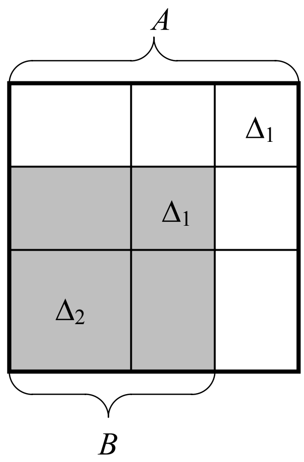

Рис. 19

Родство между предложениями **9** и **10** может быть подчёркнуто с помощью схемы, изображённой на рис. 20. Оба варианта одной схемы выглядят одинаково (как и в случае предложений **5** и **6**), — а каждое из предложений получается соответствующим

---

[6] Приведённые ЕВКЛИДОМ доказательства этих двух предложений основаны на теореме Пифагора. Скорее всего, они являются вторичными по отношению к первоначальным демонстрациям, основанным исключительно на рассмотрении квадратных частей, упоминаемых в формулировках.

[7] ГЕОРГ ЦЕЙТЕН [9] высказал гипотезу о том, что **9** и **10** предложения использовались при доказательстве соотношения между так называемыми *сторонними и диагональными числами* (см. [2], [10]). Соотношение между этими числами ЦЕЙТЕН обсуждал алгебраически; и его связь с процедурой антифайресиса оставалась не совсем ясной. Думается, что наши геометрические построения позволяют сделать эту связь гораздо более прозрачной.

расположением квадратов (на правой схеме закрашенные квадраты лежат двойным слоем).

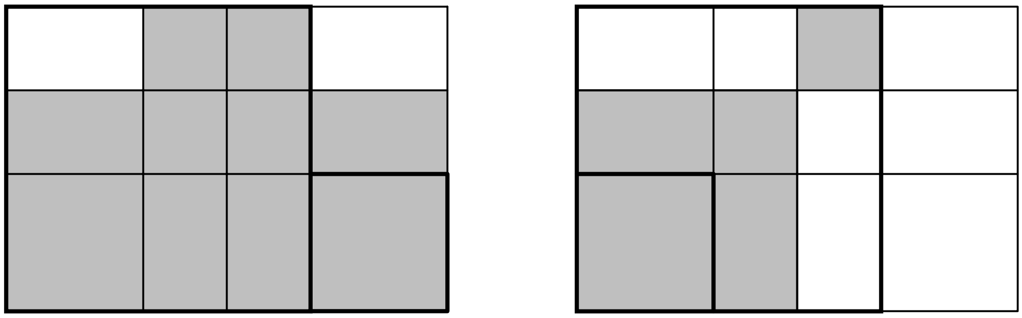

Рис. 20

Блок пятый: параллелизм предложений (5, 6) и (9, 10)

Поставив вопрос о том, чем обусловлен сильный параллелизм между формулировками предложений в парах **(5, 9)** (“Если прямая рассечена на равные и на неравные отрезки...”) и **(6, 10)** (“Если прямая линия рассечена пополам, и к ней по прямой приложена какая-либо другая прямая...”), рассмотрим задачи о нахождении двух чисел по следующим данным:

сумма чисел и их произведение	разность чисел и их произведение
сумма чисел и сумма их квадратов	разность чисел и сумма их квадратов

Все четыре задачи решаются одинаковой подстановкой. Пусть A — полусумма искомых чисел, B — их полуразность. Тогда большее из чисел представляется в виде $A + B$, а меньшее в виде $A - B$.

В задачах правого столбца полусумма A известна, и нужно определить полуразность B; в задачах левого столбца полуразность B известна, и нужно определить полусумму A. Если решение задачи ведётся на геометрическом чертеже, то в задачах правого столбца отрезок, представляющий сумму чисел, оказывается разделённым на неравные (сами числа) и равные части; во задачах левого столбца отрезок, представляющий большее число, оказывается составленным из меньшего числа и удвоенной полуразности, — что и даёт соответствующие формулировки.

В задачах первой строки произведение двух искомых чисел представляется в виде $A^2 - B^2$. Это преобразование осуществляется на основе предложения **5** для данной суммы и предложения **6** для данной разности. В задачах второй строки сумма квадратов двух искомых чисел представляется в виде $2A^2 + 2B^2$. Это преобразование осуществляется на основе предложения **9** для данной суммы и предложения **10** для данной разности.

Задачи второй строки могут быть истолкованы также геометрически, как задачи об определении катетов прямоугольного треугольника, у которого известна гипотенуза (точнее, её квадрат) и сумма либо разность катетов. Пусть дана сумма либо разность катетов *AB* и гипотенуза *d*. Разделим *AB* пополам в точке *C*, восстановим перпендикуляр *CD* = *AC* = *BC* и проведём прямые *AD* и *BD*. Затем проведём окружность с центром *A* и радиусом *d*, пересекающую *BD* в точке *E*. Опустим из *E* на *AB* перпендикуляр с основанием *F*. Нетрудно видеть, что прямоугольный треугольник *AEF* — искомый (рис. 21; левый вариант — дана сумма катетов, правый вариант — дана разность катетов).

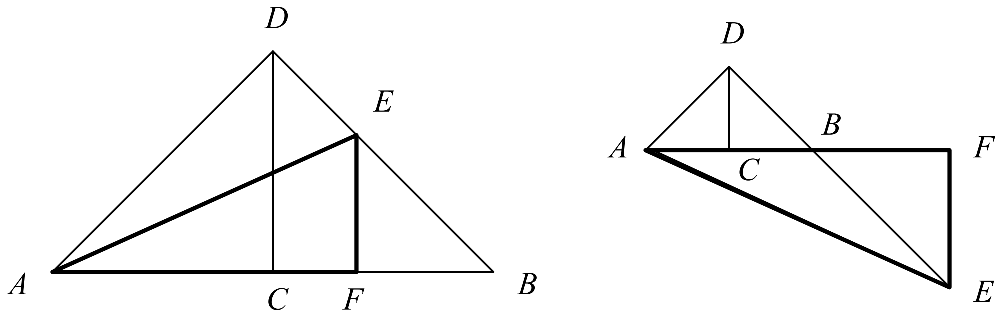

Рис. 21

Получившиеся чертежи идентичны тем схемам, на которых Евклид доказывает предложения **9** и **10** (надо только опустить из *E* перпендикуляр на *CD*). Однако чисто геометрические задачи в данной их постановке совсем не требуют последующего анализа соотношений между квадратами — ведь они уже решены. Поэтому вопрос о полном устройстве всего комплекса связанных с этими предложениями проблем (геометрическая задача на построение, алгебраическая задача на отыскание двух чисел по их сумме-разности и сумме квадратов, антифайретическое исследование несоизмеримости сторон квадратов и, наконец, алгоритм построения сторонних и диагональных чисел) остаётся на мой взгляд открытым.

Блок шестой: исходные элементы

В четырёх предыдущих блоках были рассмотрены все предложения II книги *Начал* с **4** по **14**. Нам осталось рассмотреть три первых предложения:

> **1.** Если имеются две прямые, и одна из них рассечена на сколько угодно отрезков, то прямоугольник, заключённый между этими двумя прямыми, равен прямоугольникам, заключённым между нерассечённой прямой и каждым из отрезков.
>
> **2.** Если прямая линия как-либо рассечена, то прямоугольники, заключённые между целой линией и каждым из отрезков, равны вместе квадрату на целой линии.
>
> **3.** Если прямая линия как-либо рассечена, то прямоугольник. заключенный между всей прямой и одним из отрезков, равен прямоугольнику, заключённому между отрезками, и квадрату на первом упомянутом отрезке.

С точки зрения “геометрической алгебры”, предложение **1** устанавливает в общем виде дистрибутивность умножения по отношению к сложению, а в предложениях **2** и **3** рассматриваются частные случаи этого закона. При таком подходе оказывается непонятным, зачем нужны частные случаи, когда уже сформулирован общий закон. Однако если посмотреть на эту же ситуацию в логике получения доказательств “сверху вниз”, то окажется, что во всём комплексе вспомогательных предложений с **4** по **10** постоянно проделывались действия, описанные в предложениях **2** и **3**. И естественно было предпослать два этих предложения, наряду с предложением **1**, всем предложениям следующего уровня.

Заключительный обзор

Система связей между предложениями II книги “Начал” изображена на рис. 22. Квадраты с номерами означают предложения II книги; круги — реконструированные фрагменты теорий несоизмеримости, не входящие во II книгу. Закрашенные односторонние стрелки изображают отношения логического следования; незакрашенные двусторонние стрелки — отношения параллелизма формулировок.

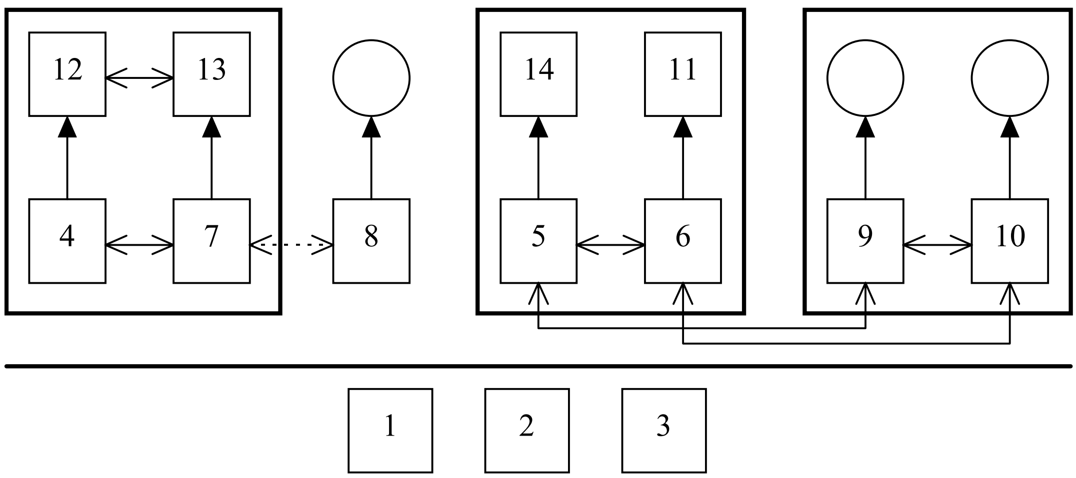

Рис. 22

Надо сказать, что порядок изложения II книги свидетельствует о некоторой неряшливости её составителя. Так предложения **4** и **7**, которые по смыслу должны идти друг за другом, оказываются разбитыми вставкой предложений **5** и **6**.[8] Точно так же тесно примыкающие друг к другу предложения **11** и **14** оказываются разбиты вставкой предложений **12** и **13**. В целом остаётся ощущение того, что вся II книга скомпилирована из нескольких математических трактатов. Однако каково было полное содержание этих трактатов, и какой дополнительной обработке был подвергнут собранный материал, сказать сложно.

[8] Д. Д. Мордухай-Болтовской (подстрочные примечания в [5], т. 1, с. 68–70) указывает, что в исходном тексте, из которого предложения **7** и **8** попали в “Начала”, они шли сразу за предложением **4**, о чём свидетельствует фраза “вычертим ту же фигуру” в предложении **7** и “вычертим дважды ту же фигуру” в предложении **8**: здесь имеется в виду фигура предложения **4**.

Библиография

1. БАШМАКОВА И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции // Историко-математические исследования. Вып. 11. 1958. С. 225–438.

2. БАШМАКОВА И. Г. Об одной интерпретации Г. Г. Цейтена // Историко-математические исследования. Вып. 4(39). 1999. с. 9–12.

3. ВАН ДЕР ВАРДЕН Б. Л. Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: Физматгиз, 1959.

4. ВЫГОДСКИЙ М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. М.: Наука, 1967.

5. ЕВКЛИД, Начала. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1948–51.

6. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия. В 3 т. Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970.

7. НЕЙГЕНБАУЭР О. Точные науки в древности. М.: УРСС, 2002.

8. РОДИН А. В. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. М.: Наука, 2003.

9. ЦЕЙТЕН Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.–Л.: ОНТИ, 1938.

10. ЩЕТНИКОВ А. И. Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие “семенного логоса” // Математическое образование. 1999. №1(8). С. 84–94.

11. ЩЕТНИКОВ А. И. Можно ли назвать книгу Диофанта Александрийского “О многоугольных числах” чисто алгебраической? // Историко-математические исследования. Вып. 8(43). 2003. С. 267–277.

12. FOWLER D. H. Ratio in early Greek mathematics // Bull. AMS. 1979. N. S., V.1. P. 807–846.

13. FOWLER D. H. Book II of Euclid’s Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio // Archive for History of Exact Sciences. 1980–82. V.22. P. 5–36; V.26. P. 193–209.

14. ITARD J. Lex livres arithmetiqúes d`Euclide. Paris: Hermann, 1961.

15. KNORR W. R. The evolution of the Euclidean Elements. A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for Greek geometry. Dordrecht a. o.: Reidel, 1975.

16. MCCABE R. L. Theodorus’ irrationality proofs. *Math. Mag*., **49**, 1976, p. 201–203.

17. SAITO K. Book II of Euclid’s Elements in the light of the theory of conic sections // *Historia Scientiarum*. 1985. V. 28. P. 31–60.

18. SZABÓ Á. Anfänge der griechischen Mathematik, München-Wein: Oldenburg, 1969.

19. TANNERY P. De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide. In: TANNERY P, Mémories Scientifiques, 1, Sciences Exactes Dans L’Antiquité, Toulouse: Edouard Privat & Paris: Gauthier-Villars, 1912. P. 254–280.

20. UNGURU S. On the need to rewrite the history of Greek mathematics // Archive for History of Exact Sciences. 1975. V. 15. P. 67–114.