

# К реконструкции итерационного метода решения кубических уравнений у ал-Бируни и Леонардо Пизанского

А. И. ЩЕТНИКОВ

Опубликовано: *Труды третьих Колмогоровских чтений. Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2005, с. 332–340.*

Абу-р-Райхан ал-Бируни при вычислении тригонометрических таблиц в 3 главе III книги «Канона Мас'уда» (ок. 1030) выполняет приближённое построение правильного девятиугольника [1, ч. 1, с. 260] и по ходу этого построения отыскивает приближённые решения кубических уравнений

$$x^3 = 1 + 3x, \quad (1.1)$$

$$x^3 + 1 = 3x. \quad (1.2)$$

Свой метод отыскания решений он никак не разъясняет. Для уравнения (1.1) найденное приближённое значение положительного корня в шестидесятеричных дробях равно  $1;52,45,47,13$ . Уравнение (1.2) имеет два положительных корня. Исходя из геометрических соображений, Бируни ищет меньший из них — тот, который близок к  $1/3 = 0;20$ . Найденное им приближённое значение корня равно  $0;20,50,16,01$ . О существовании второго положительного корня, близкого к  $3/2$ , Бируни ничего не говорит, поскольку этот корень его не интересует.

Из истории средневековой математики известно также, что Леонардо Пизанский, известный также под прозвищем Фибоначчи, в трактате «Цветок» (1225) исследовал кубическое уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20, \quad (2)$$

предложенное ему Иоанном Палермским на математическом состязании при дворе императора Фредерика II (см. [2, т. 1, с. 266]). Сам Иоанн Палермский почти наверняка заимствовал это уравнение из трактата Омара Хайяма «О доказательствах задач алгебры» (1074), где оно приводится как пример одного из видов в классификации кубических уравнений [3, с. 107]. Леонардо Пизанский исследовал уравнение (2) и решил его численно. Найденное им значение корня равно  $1;22,07,42,33,04,40$ . Подобно Бируни, он не разъясняет своего метода. Правдоподобно будет предположить, что Леонардо научился этому методу у математиков Востока во время своих путешествий.

В настоящей статье делается попытка восстановить методы и воспроизвести результаты Бируни и Леонардо. Сразу же сообщим, что реконструированные нами итерационные формулы по виду совпадают с формулами так называемого метода Ньютона (он же — метод касательных). Однако в качестве рабочих средств для их получения мы будем пользоваться не алгебраическими выражениями, раскладываемыми по порядкам малости, как это делал сам Ньютон в «Анализе уравнений с бесконечным числом членов» (1669), но традиционными для античной и средневековой математики плоскими и

телесными фигурами «геометрической алгебры». Ньютон имеет дело с алгебраическими символами; когда он говорит об отбрасывании членов по их сравнительной малости, эти члены мыслятся им как числа, которыми можно пренебречь в вычислениях по сравнению с другими числами. Математики средневековья, в отличие от Ньютона, мыслили свои уравнения телесно; и их соображения об отбрасывании малых членов должны отсылать не к числовым оценкам, но к геометрической интуиции, согласно которой пространственное тело, его тонкий поверхностный слой («лист бумаги»), узкая граница этого слоя («волос») и короткий конец этой границы («песчинка») образуют иерархию последовательно убывающих порядков малости.

При чтении статьи читателю рекомендуется постоянно помнить о том, что мы записываем квадратные и кубические уравнения в привычной нам алгебраической символике, а математики средних веков формулировали эти уравнения словесно. К примеру, уравнения (1.1) и (1.2) у Бируни формулируются так: «единица в сумме с тремя вещами равна кубу вещи» и «куб вещи в сумме с единицей равны трём вещам» [1, ч. 1, с. 260]. Такие словесные описания сами по себе не могут служить субстратом алгебраических преобразований, и потому они отсылают к изображениям плоских (в случае квадратных уравнений) или телесных (в случае кубических уравнений) фигур, которые и играют роль действительного оперативного материала алгебры.

Надо понимать и то, что для нас кубические уравнения (1.1) и (1.2) представляют собой два варианта одного и того же уравнения, тем более что одно из них преобразуется в другое заменой  $x \rightarrow -x$ . Но для средневековых математиков эти два уравнения были существенно различными, поскольку они изображались и решались с помощью разных чертежей, как это будет показано ниже. Само собой разумеется, отрицательные корни уравнений в расчёт не принимались, поскольку неизвестное в исходных формулировках выступало как отрезок, сторона квадрата, ребро куба. Точно так же и суммарные величины, стоявшие в правой и левой частях уравнения, изначально считались положительными, поскольку они представляли собой некоторые площади в случае квадратного уравнения и объёмы в случае кубического уравнения.

Рассмотрим кубическое уравнение (1.1), которое решал Бируни:

$$x^3 = 1 + 3x.$$

Начнём процесс решения с подбора «вручную» такого  $x_0$ , чтобы при  $x = x_0$  численные значения правой и левой частей не сильно отличались друг от друга. Удобно положить  $x_0 = 2$ , при этом в левой части получается 8, а в правой части 7, и левая часть превышает правую на 1. Нетрудно понять, что начальное приближение  $x_0 = 2$  оказалось завышенным по сравнению с точным значением корня, и его надо уменьшить на некоторую величину  $\delta$ .

Будем мыслить это «уменьшение подбираемой вещи» геометрически: со стоящего в левой части «куба вещи» надо снять гномон толщины  $\delta$ , а со стоящего в правой части «тела» с площадью основания 3 и высотой  $x$  надо снять пластину объёмом  $3\delta$ . Основная идея решения состоит в том, что при вычислении объёма гномона мы будем приближённо считать, что он складывается из трёх квадратных пластин площадью  $x_0^2$  и толщиной  $\delta$ ; тем самым объём гномона приближённо равен  $3x_0^2\delta = 12\delta$ . Величину  $\delta$  нужно по-

добрать так, чтобы объём гномона  $12\delta$  оказался на единицу больше объёма пластины  $3\delta$ :

$$12\delta = 1 + 3\delta,$$

откуда  $\delta = 1/9 = 0;06,40$ . Тем самым очередное приближённое значение «вещи»

$$x_1 = x_0 - \delta = 2 - 0;06,40 = 1;53,20.$$

Каждая следующая итерация будет приводить к уравнению для определения толщины гномона  $\delta$ , имеющему вид

$$x_n^3 - 3x_n^2\delta = (3x_n + 1) - 3\delta,$$

откуда получается итерационная формула

$$x_{n+1} = x_n - \delta = x_n - \frac{x_n^3 - (3x_n + 1)}{3(x_n^2 - 1)} = \frac{2x_n^3 + 1}{3(x_n^2 - 1)}.$$

Вычисления по этой формуле дают результат Бируни уже на третьем шаге:

$x_0$	2
$x_1$	1;53,20
$x_2$	1;52,46,...
$x_3$	1;52,45,47,13...

Для уравнения (1.2) соответствующая итерационная формула строится аналогичным образом; она имеет вид

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3(x_n^2 - 1)}.$$

Стартуя с  $x_0 = 1/3 = 0;20$ , мы получаем результат Бируни уже на втором шаге:

$x_0$	0;20
$x_1$	0;20,50
$x_2$	0;20,50,16,01...

Если стартовать с  $x_0 = 3/2 = 1;30$ , итерационный процесс будет сходиться ко второму положительному корню уравнения (2.1):

$x_0$	1;30
$x_1$	1;32
$x_2$	1;31,55,31...
$x_3$	1;31,55,31,11,57,56...

Зададимся теперь вопросом, если Бируни и в самом деле пользовался описанным выше методом, то как он производил оценку точности полученных результатов? На каждой итерации имеет смысл оставлять в результате только верные шестидесятеричные знаки, чтобы не делать лишних вычислений. Но как узнать, сколько найденных знаков являются точными, не выполняя следующей итерации? Возможно, что здесь применялся эмпирически установленный на многих примерах факт удвоения числа верных знаков с каждой следующей итерацией.

Применим этот алгоритм к отысканию положительного корня кубического уравнения (2), которое решал Леонардо Пизанский. Пусть приближение  $x_n$ , подставленное в левую часть уравнения (2), даёт результат, отличный от 20. Получившаяся разница может быть представлена как  $x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20$ . С другой стороны, мы представляем её как суммарный объём гномонов всех тел, из которых составляется левая часть уравнения (2). Если пренебречь столбиками сечением  $\delta^2$  и кубиком  $\delta^3$ , эта сумма будет приближённо равна  $(3x_n^2 + 4x_n + 10)\delta$ . Отсюда

$$x_{n+1} = x_n - \delta = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10} = \frac{2x_n^3 + 2x_n^2 + 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}.$$

Стартуя с  $x_0 = 1;30$ , мы вновь получаем требуемую точность уже на третьем шаге:

$x_0$	1;30
$x_1$	1;22...
$x_2$	1;22,07,42...
$x_3$	1;22,07,42,33,04,37...

Весомым доводом в пользу того, что Бируни и Леонардо могли пользоваться описанным выше методом, служит совпадение результатов вычислений, проведённых в две или три итерации без какого-либо специального подбора начального приближения, с теми результатами, которые сообщают сами эти математики.

С другой стороны, во всей этой истории имеется одна существенная проблема: по нашему методу последовательные приближённые значения должны подходить к корню уравнения (2) снизу, а сам Леонардо получил завышенное приближённое значение корня. Расхождение нашего результата с результатом Леонардо составляет 3 единицы в шестом знаке; при этом истинное значение корня лежит примерно посередине между этими двумя приближениями. И конечно, желательно было бы показать, откуда у Леонардо могло возникнуть отклонение в другую сторону от точного значения.

Ранее попытка реконструировать итерационный метод Леонардо Пизанского была сделана С. Глушковым. В работе [4] им было выдвинуто предположение, что Леонардо вычислял приближённое значение корня, пользуясь методом линейной интерполяции (в средние века этот метод называли правилом двух ложных положений). В соответствующих вычислениях результат Леонардо достигается на 18-й итерации. Думается, что третий шаг итерационного процесса, на котором требуемая точность достигается в нашей реконструкции, является достаточно сильным аргументом в пользу её большего правдоподобия по сравнению с реконструкцией Глушкова.

Другая реконструкция итерационного метода Леонардо Пизанского описана Б. Л. Ван дер Варденом [5, с. 34]. Он предполагает, что Леонардо мог строить последовательные приближения по схеме Горнера. (Отметим, что сама эта схема для извлечения квадратных и кубических корней была описана под названием «метода небесных элементов» в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах» (II в. до н. э.), а китайские математики Цзу Чун-чжи (V в.) и Ван Сяо-тун (VII в.) решали этим методом кубические уравнения [2, т. 1, с. 171].) Так для уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

на первом шаге устанавливается, что  $1 < x < 2$ . Затем полагается  $x = 1 + y/60$ , что после раскрытия скобок приводит к кубическому уравнению

$$y^3 + 5,00y^2 + 17,00,00y = 7,00,00,00$$

(коэффициенты записаны в шестидесятеричной системе), для которого подбором устанавливается, что  $22 < y < 23$  (при подборе удобно двигаться сверху, вычитая одну за другой единицы из приближения  $7,00 : 17 \approx 24$ ). На следующем шаге точно так же кладётся  $y = 22 + z/60$ , получается новое кубическое уравнение и отыскиваются целочисленные границы, внутри которых заключено значение  $z$ ; и так далее.

Проблемная точка у этой реконструкции та же самая, что и у нашей: ведь если бы Леонардо находил приближённые значения корня по этой схеме, то на шестой итерации он неминуемо получил бы результат  $1;22,07,42,33,04,38$ , а у него в шестом шестидесятеричном знаке стоит 40.

В целом вопрос, конечно, нельзя считать окончательно решённым; для его дальнейшего прояснения было бы желательно применить реконструированный в настоящей статье метод к каким-нибудь другим уравнениям, решавшимся в средневековой математической литературе. В частности, большой интерес представляли бы примеры численного решения алгебраических уравнений степени выше третьей, так как для них описанная выше процедура «снятия гномона» уже не допускает наглядной геометрической интерпретации и требует формальных алгебраических рассуждений, основанных на использовании таблицы биномиальных коэффициентов.

## Литература

1. БЕРУНИ АБУ РАЙХАН. Канон Мас'уда. // БЕРУНИ АБУ РАЙХАН. *Избранные произведения*. Ташкент, Фан, 1973–76, т. 5, ч. 1–2.

2. *История математики с древнейших времён до начала XIX столетия*. В 3 т. М., Наука, 1970.
3. ХАЙЙАМ ‘ОМАР. *Трактаты*. М., Изд. вост. лит., 1964.
4. GLUSHKOV S. On approximation methods of Leonardo Fibonacci. *Historia Mathematica*, **3**, 1976, p. 291–296.
5. VAN DER WAERDEN B. L. *A history of algebra: From al-Khwerizmo to Emmy Noeter*. Berlin a. o., Springer, 1985.