Геометрические методы приближённого вычисления площади круга: этюд на тему Архимеда

1. Метод приближённых вычислений площади круга, которым пользовался великий древнегреческий математик Архимед (282–212 до. н. э.) в трактате «Об измерении круга», основывается на том очевидном факте, что площадь круга меньше площади любого описанного и больше площади любого вписанного многоугольника. Далее дело сводится к рассмотрению последовательностей правильных описанных и вписанных многоугольников с удваивающимся на каждом шаге числом сторон, из которых первая последовательность приближает площадь круга сверху, а вторая — снизу, поскольку разность площадей вписанного и описанного одноимённых правильных многоугольников при увеличении числа их сторон может быть сделана сколь угодно малой.

Сам Архимед довёл свои вычисления до 96-угольников и определил, что отношение площади круга к квадрату радиуса, которое мы обозначаем сегодня буквой π, заключено между $3\frac{10}{71} = 3{,}1408...$ и $3\frac{1}{7} = 3{,}1428...$

Многочисленные последователи Архимеда улучшали эти приближения, рассматривая многоугольники со всё большим и большим числом сторон. Знаменитый древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в.) выражал значение π числом $3\frac{17}{120} = 3{,}1416...$, а индус Ариабхата (V в.) использовал значение $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$. Такая точность вычисления требовала рассмотрения сторон 384-угольников. Китайский математик Лю Хуэй (III в.) довёл свои выкладки до 3072-угольников и получил результат 3,14159. Ещё один китайский математик и астроном, Цзу Чун-чжи (V в.), в не дошедшем до нас трактате получил ещё более точное значение 3,1415926. Точность этих вычислений была превзойдена только в XV в. Гияс ад-Дином Джемшидом ал-Каши: на многоугольниках с $3 \cdot 2^{28}$ сторонами он получил значение π с 16 десятичными знаками после запятой. Из европейских математиков этой же точности достиг в 1597 г. Адриен ван Роомен (1561–1615). Но ещё больше терпения и искусства в вычислениях проявил Лудольф ван Цейлен (1539–1610), вычисливший значение π последовательно с 20, 32 и 35 десятичными знаками. По его имени число π раньше даже называли «лудольфовым числом».

Обозначим R — радиус окружности, A_n и a_n — стороны её описанного и вписанного правильных n-угольников, h_n — срединный перпендикуляр, опущенный из центра окружности на сторону a_n (рис. 1).

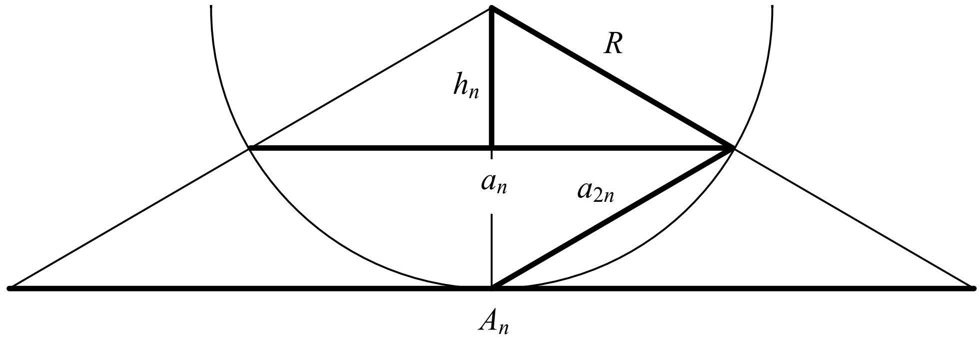

Рис. 1

Применив теорему Пифагора, получим

$$2h_n = \sqrt{4R^2 - a_n^2}\ .$$

Из подобия вписанного и описанного многоугольников проистекает пропорция $A_n : R = a_n : h_n$, откуда

$$A_n = \frac{a_n R}{h_n} = \frac{2a_n R}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}\ .$$

Теперь мы можем записать формулы, выражающие площади правильных вписанного и описанного n-угольников (которые мы обозначим s_n и S_n) через R и a_n:

$$s_n = \frac{n a_n h_n}{2} = \frac{n a_n}{4}\sqrt{4R^2 - a_n^2}\ , \tag{1.1}$$

$$S_n = \frac{n A_n R}{2} = \frac{n a_n R^2}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}\ . \tag{1.2}$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, ещё раз применим теорему Пифагора и из соотношения $a_{2n}^2 - (R - h_n)^2 = R^2 - h_n^2$ выведем «формулу удвоения», выражающую a_{2n} через R и a_n:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}\ . \tag{2}$$

Все требуемые формулы заготовлены, и теперь можно приступать к собственно вычислениям. Впишем в окружность радиуса $R = 1$ правильный шестиугольник со стороной $a_6 = R = 1$. Далее будем последовательно вписывать в окружность правильные многоугольники с удвоенным числом вершин. По формуле (2) будем вычислять их стороны, а по формулам (1.1–2) — их площади, а также площади одноимённых с ними описанных многоугольников.

Тонкость этих расчётов состоит в том, что мы должны производить все промежуточные вычисления с точностью, соответствующей точности конечного результата. Мы сегодня можем извлекать квадратные корни с помощью калькулятора и удерживать в запасе те десятичные цифры, которые нам не потребуются; однако наши предшественники извлекали эти корни вручную, поэтому обременять себя лишними бесполезными для дела вычислениями им совсем не хотелось, а недостаточная точность вычислений могла привести к ошибочному результату.

Оценим относительную ошибку метода Архимеда как

$$\varepsilon = \frac{S_n - s_n}{s_n} = \frac{a_n^2}{4R^2 - a_n^2} \approx \frac{a_n^2}{4R^2}.$$

При больших n выполняется приближённое равенство $a_n \approx \frac{2\pi R}{n} \approx \frac{6R}{n}$, отсюда

$$\varepsilon = \left(\frac{3}{n}\right)^2.$$

Тем самым для достижения относительной ошибки, не превышающей ε, число сторон рассматриваемых многоугольников должно быть равно

$$n = \frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Если мы хотим, чтобы результат вычислений содержал 3 верные десятичные цифры, относительная ошибка должна составлять 10^{-3}, и тем самым число сторон должно быть порядка 100. Для таких вычислений подходит вписанный многоугольник с $96 = 3 \cdot 2^5$ сторонами, который получается из вписанного шестиугольника четырёхкратным удвоением числа сторон.

Впрочем, на этом пути нас ждут подводные камни, которые надо ещё научиться обходить. Для примера, попробуем рассчитать по нашим формулам площади вписанного и описанного 96-угольников, производя все вычисления с точностью до 4 знаков после запятой. К своему удивлению мы обнаружим, что рассчитанная таким образом площадь вписанного 96-угольника окажется больше площади описанного 48-угольника, что противоречит всякому здравому смыслу!

Причина этой несуразицы заключена в накоплении ошибок при последовательных извлечениях корней. Поскольку значение разности $2 - \sqrt{4 - a_n^2}$ с ростом n стремится к нулю, для сохранения заданной точности нам следует вычислять в этой разности не 4 цифры после запятой, а 4 значащие цифры, — но тем самым $\sqrt{4 - a_n^2}$ надо вычислять с точностью до 4 цифр, отличных от идущих после единицы девяток.

Вычисления с 4 знаками после запятой					
n	a_n	$\sqrt{4 - a_n^2}$	$a_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}$	s_n	S_n
6	1	1,7320	0,2680	2,568	3,464
12	0,5177	1,9318	0,0682	3,000	3,239
24	0,2612	1,9829	0,0171	3,108	3,161
48	0,1308	1,9957	0,0043	3,132	3,146
96	0,0656	1,9989		3,147	3,151
Вычисления с 4 значащими цифрами					
48	0,1308	$1{,}995_{718}$	0,004282	3,132	3,146
96	0,06543	1,999		3,139	3,142

2. Улучшенный метод вычисления площади круга. Мы понимаем, что истинное значение площади круга лежит где-то между значениями площадей правильных одноимённых вписанного и описанного многоугольников. Если оно лежит посередине, не может ли оно быть хотя бы приблизительно равно их среднему арифметическому? Проверка этой гипотезы показывает, что среднее арифметическое по сравнению с истинным значением оказывается заметно заниженным, — никакого приращения точности мы таким образом не получаем.

И всё же идея хороша, нужно только знать, как вычислять правильное «среднее». Удивительно то, что все необходимые для этого средства имелись уже у Архимеда, но изобретён этот ускоренный метод вычисления приближённых значений площади круга был только в XVII в. голландским учёным Виллебрордом Снеллем (1580–1626) (тем самым, который открыл закон преломления света), а строго обоснован его соотечественником, одним из ведущих математиков и механиков своего времени Христианом Гюйгенсом (1629–1695).

Перевод сочинения Гюйгенса на русский язык был переиздан издательством УРСС в 2003 г., и с ним может ознакомиться всякий желающий. Следуя принятому в этой заметке стилю изложения, мы не будем пересказывать работу Гюйгенса, но ограничимся тем, что покажем, как может быть достигнуто сильное улучшение для приближений площади круга снизу. Эта техника основана на приближённом учёте площадей тех круговых сегментов, которые находятся между вписанным в круг многоугольником и границей круга. А именно, всякий круговой сегмент мы будем приближать параболическим сегментом с таким же основанием и высотой. Уже на чертеже для вписанного треугольника с наращенными на его сторонах параболическими сегментами видно, насколько такой подход точнее обычного (рис. 2); а при увеличении числа сторон вписанного многоугольника он обещает исключительно высокую эффективность!

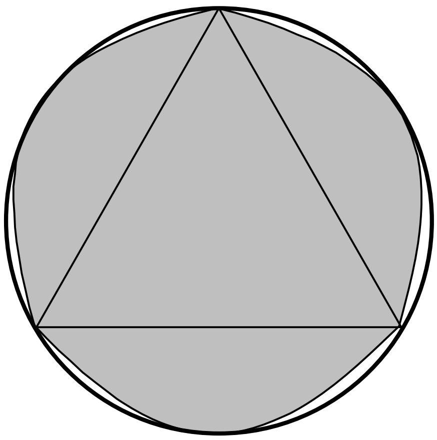

Рис. 2

ТЕОРЕМА. Сегмент параболы, в котором отсекающая прямая перпендикулярна диаметру параболы, целиком лежит внутри сегмента круга на том же основании под той же высотой.

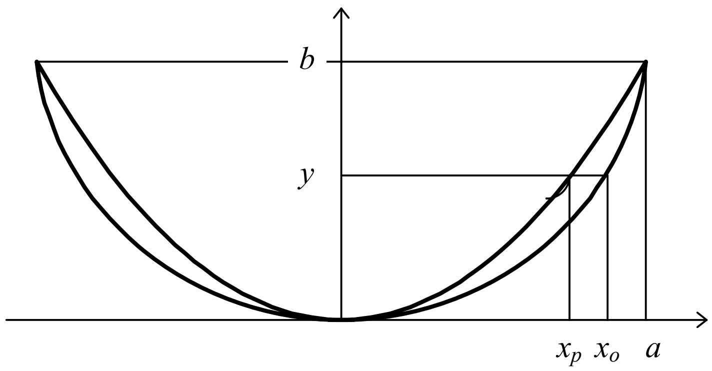

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим основание обоих сегментов $2a$, высоту b (рис. 3). Основное свойство параболы заключено в пропорции $\frac{x_p^2}{a^2} = \frac{y}{b}$. Для окружности имеет место схожая формула $\frac{x_o^2 + y^2}{a^2 + b^2} = \frac{y}{b}$, которую мы предоставляем вывести читателю. Поскольку $y < b$, тем самым $\frac{y^2}{b^2} < \frac{y}{b}$. Чтобы уравнять отношения, должно быть $x_o > x_p$.

ОСНОВНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ФОРМУЛА. Рассмотрим фигуру, составленную из вписанного в круг правильного $2n$-угольника и опирающихся на его стороны параболических сегментов, вписанных в соответствующие круговые сегменты (рис. 2). Как доказано Архимедом в трактате «О квадратуре параболы», площадь параболического сегмента составляет 2/3 от произведения его основания на высоту. Тем самым площадь рассматриваемой фигуры равна

$$S = 2n \cdot \left(\tfrac{1}{2} a_{2n} h_{2n} + \tfrac{2}{3} a_{2n} (R - h_{2n})\right) = \tfrac{4}{3} nRa_{2n} - \tfrac{1}{3} nh_{2n} a_{2n}.$$

Поскольку имеет место соотношение $2h_{2n} a_{2n} = Ra_n$, вывод которого мы опять-таки оставляем читателю, с его учётом мы получаем основную расчётную формулу

$$S = \tfrac{1}{6}(8a_{2n} - a_n) nR. \tag{3}$$

Формула (3) даёт для площади круга единичного радиуса следующие приближения:

2*n*	***S***
6	3,134...
12	3,1411...
24	3,14156...
48	3,141590...
96	3,1415925...

Уже результат для шестиугольника, записанный в первой строке, даёт ошибку менее 1%. Результат в 6 верных значащих цифр достигается данным методом уже для 48-угольника — против 3072-угольника при использовании метода Архимеда.

В целом же описанный здесь метод при одинаковом числе сторон даёт вдвое больше верных десятичных цифр, нежели метод Архимеда. Гюйгенсу удалось усовершенствовать его ещё сильнее, так что его метод в сравнении с методом Архимеда стал давать втрое больше верных десятичных цифр.

В трудах Снелля и Гюйгенса метод Архимеда достиг самого высокого развития, но вместе с тем был исчерпан. Переворот в математике, произошедший по влиянием анализа бесконечно-малых, отразился и на теории круга. Но эта часть истории, несомненно, заслуживает отдельного подробного рассмотрения.

Литература

АРХИМЕД. *Сочинения*. Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962.

АРХИМЕД. ГЮЙГЕНС. ЛЕЖАНДР. ЛАМБЕРТ. *О квадратуре круга*. С приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио. Пер. С. Н. Бернштейна. Одесса: Mathesis, 1913. (Репринт: М., УРСС, 2002)

ВЕСЕЛОВСКИЙ И. Н. *Архимед*. М.: Учпедгиз, 1957.

ЖИТОМИРСКИЙ С. В. *Архимед*. М.: Просвещение, 1981.

ЗВЕРКИНА Г. А., СУФИЯРОВА И. Н. О методах приближения длины окружности периметрами правильных многоугольников. *Историко-математические исследования*, **2(37)**, 1997, с. 237–262.

КАГАН В. Ф. *Архимед, краткий очерк о жизни и творчестве*. М.–Л.: Гостехиздат, 1951.

ЛУРЬЕ С. Я. *Архимед*. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1945.

ЧВАЛИНА А. *Архимед*. М.–Л.: 1934.