Основополагающие понятия лейбницева исчисления [1]

ХЕНК И. М. БОС

Введение

Мы празднуем 300-летие появления первой статьи об исчислении бесконечно малых.[2] В ней ещё содержалось много неясных высказываний и даже заблуждений.[3] Однако к 1684 г. у Лейбница уже сложилось чёткое представление об этом исчислении. Это представление я и обозначаю выражением «лейбницево исчисление». «Изобретение» или «открытие» Лейбницем исчисления бесконечно малых обычно датируется 1675 г.,[4] но основные понятия и идеи, сформулированные им поначалу, были существенно переработаны за девять лет, прошедших с момента открытия до первой публикации. Более поздние статьи самого Лейбница, а также братьев Бернулли, Лопиталя и других сделали это исчисление известным; оно быстро распространилось и стало применяться для решения самых разнообразных задач. С 1684 г. до 1720 г. основополагающие понятия лейбницева исчисления претерпели лишь незначительное изменение.[5] В этой статье я буду иметь дело с этими основополагающими понятиями.[6] Моей целью будет показать характерные особенности лейбницева исчисления. Я попытаюсь сделать это, исследуя, в чём оно отличается от современного математического анализа.

---

[1] H. J. M Bos, The fundamental concepts of the Leibnizian calculus. *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14, Wiesbaden, Steiner Verlag, 1986, pp. 103–118. Перевод выполнен А. И. Щетниковым.

[2] G. W. Leibniz, «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus», *Acta Eruditorum* октябрь 1684, pp. 467–473; также в G.W. Leibniz *Mathematische Schriften* (7 vols., ed. C.I. Gerhardt), Berlin and Halle, 1849–1853 (перепечатано Hildesheim 1961–1962), **5**, pp. 220–226.

[3] Ср. H.-J. Hess «Zur Vorgeschichte der 'Nova Methodus'», *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14 (Wiesbaden (Steiner), 1986), pp. 64–102. См. также всесторонние и чрезвычайно полезные примечания, сделанные в последнем итальянском издании *Метода* P. Dupont'ом и C. S. Roero: *Leibniz 1684*, Torino (Fac. Sci. Mat. Fis. Nat., Univ. Torino; *Series Quaderni di Mathematica* 56), 1984.

[4] См. Hofmann, J. E., *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik wahrend des Aufenthaltes in Paris (1672–1676)*, Munchen, 1949, pp. 118–130; J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris 1672–1676* (перевод предыдущего издания), Cambridge, 1974, pp. 187–201; M. Baron and H. J. M. Bos, *Newton and Leibniz* (Unit C3 of the Open University course AM 289 *History of Mathematics — origins and development of the calculus*), Milton Keynes (Open University Press), 197, pp. 35–46 и H. J. M. Bos, *Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition*, (Глава II опубликована в*: From calculus to set theory, and introductory history* (ed. I. Grattan Guinness), London, 1980), pp. 49–93.

[5] Самое важное фундаментальное изменение лейбницева исчисления в ранний период состояло в переносе методов, развитых для решения одномерных задач (в основном работа с кривыми) на двумерные (семейства кривых, переменные с двумя степенями свободы, поверхности); см. S. B. Engelsman, «Orthogonaltrajektorien im Pri-oritatsstreit zwischen Leibniz und Newton» *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14 (Wiesbaden (Steiner) 1986), pp. 144–156, а также S. B. Engelsman, *Families of curves and the origins of partial differentiation*, Amsterdam a. o. (North-Holland Publ.), 1984.

[6] Я обсуждал эти вопросы более подробно в моей статье «Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus», *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1974, pp. 1–90; настоящая статья подводит итог некоторым частям этой работы, особенно главе II, pp. 12–35.

–

Я собираюсь обсуждать вопросы понимания и техники в большей мере, нежели вопросы оснований. Другими словами, меня будет интересовать не то, *что* такое лейбницевы дифференциалы или суммы, а то, *как* их представляли себе и использовали Лейбниц и его первые последователи. Я полагаю, что такой подход сможет прояснить некоторые положения лейбницева исчисления, часто упускаемые из виду.

Ломаная с бесконечным числом вершин

Лейбниц неоднократно отмечал, что ключом к пониманию его исчисления служит представление о кривой как о ломаной с бесконечным числом вершин. К примеру, в 1684 г. он писал о своих геометрических методах:

> все они могут быть выведены из общего принципа, которым я пользуюсь при измерении криволинейных фигур: он состоит в том, что кривая линия может быть представлена как ломаная с бесконечным числом сторон.[7]

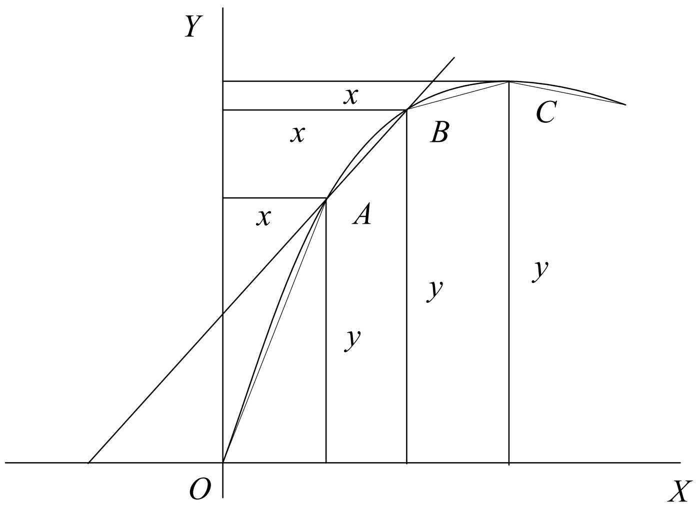

Рис. 1

Чтобы пояснить концепцию кривой как ломаной с бесконечным числом вершин, я рассмотрю сначала тот случай (рис. 1), когда кривая приближается конечной ломаной *OABC*. Предположим, что вершины ломаной лежат на кривой. Для каждой из этих вершин рассмотрим ординату y, абсциссу x, длину дуги s, измеряемую от начала кривой, площадь Q между кривой, осью абсцисс и ординатой (называемую также «квадратурой» кривой), и вообще любую переменную, которая может быть определена в связи с этой кривой. Приближающая ломаная порождает таким образом последовательности переменных. Уже в своих ранних исследованиях Лейбниц специально интересовался той ролью, которую эти последовательности играют в двух основных задачах, связанных с кривыми: задаче о квадратурах и задаче о касательных. Он осознавал, что квадратуры

[7] «... omnes deduci posse ex generali quodam meo dimentiendorum curvilineorum principio, quod figura curvilinea censenda sit aequipollere Polygono infinitorum laterum». (Leibniz, *Mathematische Schriften* (прим. 1) vol. 5, p. 126). Цитата из статьи в *Acta Eruditorum* (декабрь 1684).

связаны с суммами порождаемых последовательностей, а касательные — с их разностями. А именно: если ломаная выбрана таким образом, чтобы разность между последовательными значениями x была постоянно равна 1, то тогда сумма ординат даёт приближение для квадратуры, а разности между последовательными ординатами будут приближённо задавать наклон касательных в соответствующих точках кривой. В случае произвольных приближающих ломаных отношение сумм и разностей к квадратурам и касательным будет несколько более тонким, но по-прежнему удобным.

В ранних исследованиях числовых последовательностей Лейбниц рассматривал суммирование и получение разностей как операции, соответственно задающие для данной последовательности новые последовательности сумм и разностей, как это показано в *Таблице 1*. Он отмечал также, что эти операции взаимообратны: построив последовательность разностей для последовательности сумм, мы восстановим исходную последовательность, и точно так же, взяв последовательность сумм для последовательности разностей, мы опять получим члены исходной последовательности (за исключением a_1, если быть более точным).

Последовательность:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

↙ ↘

последовательность сумм:	последовательность разностей:
$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$	$d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$
где	где
$s_1 = a_1,$	$d_1 = a_2 - a_1,$
$s_2 = a_1 + a_2,$	$d_2 = a_3 - a_2,$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$	$d_3 = a_4 - a_3,$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$	$d_4 = a_5 - a_4,$
и т. д.	и т. д.

Таблица 1

Программа

Исходя из соответствия между свойствами кривых и последовательностей, Лейбниц сделал два важных интуитивных вывода:

- Изучение касательных и квадратур кривых приводит к рассмотрению последовательностей абсцисс, ординат и т. д.; касательные соответствуют разностям, квадратуры — суммам. Поскольку операции взятия последовательностей сумм и последовательностей разностей взаимообратны, задачи о касательных и квадратурах также являются взаимообратными.
- Если кривая приближается конечной ломаной, порождаемые последовательности доставляют приближения для квадратур и касательных. Эти приближения будут тем лучше, чем меньшими будут взяты разности соседних членов. И они станут

точными, когда разности будут взяты бесконечно малыми (а соседние члены станут бесконечно близкими), то есть когда кривая будет рассматриваться как ломаная с бесконечным числом вершин.

Эти интуиции, сколь бы неясными они ни были, были объединены в программу, которую Лейбниц осознанно сформулировал в 1765 г. и которую он успешно осуществлял в последующие годы. Контуры этой программы таковы:

- Её цель состоит в создании исчисления квадратур, касательных и родственных задач, связанных с кривыми, которое представляло бы собой метод, основывающийся на формулах и правилах вычислений.
- Это исчисление касается последовательностей (ординат, абсцисс и других переменных) с бесконечно малыми разностями.
- Это исчисление содержит также операции над этими последовательностями, а именно операцию (с символом d), ставящую в соответствие данной последовательности её разностную последовательность, и операцию (с символом $\int$), ставящую в соответствие данной последовательности последовательность её сумм. Первая операция используется для определения касательных, вторая — для определения квадратур.
- Операции d и $\int$ взаимообратны.

Проиллюстрируем несколькими цитатами, как Лейбниц формулировал эти ранние программные идеи. В 1697 г. он писал Валлису:

> Рассмотрение разностей и сумм числовых последовательностей привело меня к моей первой догадке, когда я осознал, что разности относятся к касательным и суммы — к квадратурам.[8]

В другом месте Лейбниц писал:

> *Основание анализа:* Разности и суммы обратны друг другу, так что сумма разностной последовательности есть член последовательности, и разность суммарной последовательности также есть член последовательности. Первое я обозначаю так: $\int dx = x$; второе так: $d\int x = x$.[9]

Экстраполяция конечной ломаной

Описанная выше программа была реализована в лейбницевом исчислении. Я хочу разъяснить это исчисление, обсуждая вопросы понимания и техники, с которыми Лейбниц

[8] «Mihi considerationern differentiarum et summarum in seriebus numerorum primam lucern affuderat, cum animadverterem differentias tangentibus, et summas quadraturis respondere». (письмо Лейбница Валлису 28.05.1697, Leibniz, *Mathematische Schriften* (прим. 1) vol. 4, p. 25).

[9] «Fundamentum calculi: Differentiae et summae sibi reciprocae sunt, hoc est summa differentiarum seriei est seriei terminus, et differentia summarum seriei est ipse seriei terminus, quorum illud ita enuntio: $\int dx$ aequ. x; hoc ita; $d\int x$ aeq. x» (из рукописи *Elementa calculi novi pro differentiis el summis, tangentibus et quadraturis*, опубликованной C. I. Gerhardt'ом в *Die Geschichte der höheren Analysis, erste Ableilung, die Entdeckung der höheren Analysis*, Halle 1855, pp. 149–155).

столкнулся в работе над своей программой. Представим себе (вместе с Лейбницем), что произойдёт, когда конечная ломаная, приближающая кривую, совпадёт с кривой. Если мы визуализируем этот предельный процесс (рис. 2), это нам не многим поможет: разности между членами последовательности ординат и т. п. станут равны нулю, ординаты заполнят всю площадь между кривой и осью абсцисс, а от ломаной ничего не останется.

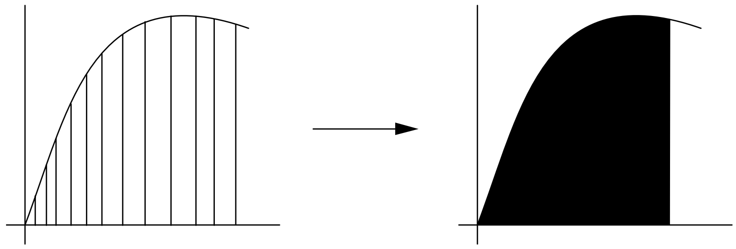

Рис. 2

Один из способов справиться с этой проблемой состоит в том, чтобы представить предельный процесс локально (рис. 3). В каждой точке кривой секущая (продолжение стороны ломаной) становится касательной, и высота плоской полоски, ограниченной одним из звеньев ломаной, становится равной ординате. Этот локальный предельный процесс легко визуализировать и использовать; в действительности он является основным в современном математическом анализе, где производная определяется именно посредством этого процесса.

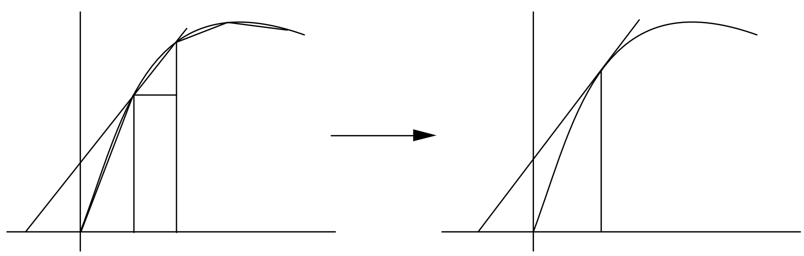

Рис. 3

Однако Лейбниц не пользовался локальным приближением, предпочитая ему глобальное. Он не представлял себе переход от конечной ломаной к ломаной с бесконечным числом вершин как предельный процесс. В этом случае звенья и углы ломаной исчезли бы, и предельный процесс, как это объяснено выше, мог бы быть интерпретирован лишь локально. Лейбниц смотрел на этот переход скорее как на прямую экстраполяцию конечного случая на бесконечный. При этом сохраняются такие элементы ломаной, как стороны и углы, а также порождаемые последовательности. Глобальное изучение кривой попрежнему возможно; лишь члены последовательностей становятся бесконечно близкими.

Конечно, трудно визуализировать ломаную с бесконечным числом вершин и порождаемые последовательности; проблема коллапса, изображённая на рис. 2, всё ещё сохраняется. Лейбниц разрешил, или скорее обошёл эту концептуальную проблему прежде всего отказом от рассмотрения того, что происходит с разностями и суммами самими по себе. Они становятся инфинитезимальными, однако Лейбниц старался избегать обсуждения природы инфинитезимальных величин в своём исчислении. Скорее он изучал, что происходит с операциями взятия суммарных и разностных последовательностей после перехода к бесконечному случаю. Это смелый подход, и я считаю, что он характеризует математический стиль Лейбница, в частности — силу его абстракции.

Исследуя процесс прямой экстраполяции, зададимся вопросом, как преобразуются последовательности, порождаемые конечной ломаной. Представляя такую ломаную, мы фактически выделяем конечное число значений переменных, а именно тех, которые связаны с вершинами ломаной. Таким образом мы представляем каждую переменную пробегающей конечную последовательность значений. При переходе к ломаной с бесконечным числом вершин тем самым подразумевается, что переменная пробегает бесконечную последовательность бесконечно близких значений. И поскольку ломаная с бесконечным числом вершин теперь совпадает с кривой, не принимаются во внимание никакие значения переменной, кроме значений последовательности. Понятия последовательности и переменной теперь совпадают; переменная *и есть* пробегаемая ею последовательность.

Теперь рассмотрим операции, которые в конечном случае сопоставляют последовательностям значений переменной последовательности их разностей или их сумм. При переходе к бесконечному случаю эти операции, соответственно обозначаемые символами d и $\int$, сопоставляют бесконечным последовательностям бесконечные последовательности. Но поскольку эти последовательности совпадают теперь с переменными как таковыми, d и $\int$ становятся операциями, действующими над переменными и порождающими новые переменные. Операция d сопоставляет переменным x, y, s, Q и т. д. новые переменные, называемые их дифференциалами и обозначаемые dx, dy, ds, dQ и т. д. Эти дифференциалы суть переменные, они бесконечно малы, и они пробегают значения последовательности бесконечно малых разностей для соответствующей последовательности x, y, s и Q. Аналогично, операция ставит в соответствие переменным x, y, s, Q и т. д., новые переменные $\int x$, $\int y$, $\int s$, $\int Q$, являющиеся бесконечно большими.

Концепция переменных, пробегающих бесконечные последовательности бесконечно близких значений, и соответствующая концепция дифференциалов и сумм как новых переменных, является ключевой для понимания лейбницева исчисления. Она заметно отличается от ньютонова исчисления флюксий, основывающегося на принципиально иной концепции переменных, скорее протекающих по континууму значений, нежели пробегающих по последовательности.

Поскольку дифференциалы являются переменными и поскольку операция d действует над переменными, она может быть приложена и к дифференциалам. Это приводит к дифференциалам высших порядков:

$$dx \xrightarrow{d} ddx$$

$$ds \xrightarrow{d} dds$$

и т. д.

Эти дифференциалы высших порядков определяются как разностные последовательности для разностных последовательностей первого порядка:

$$ddx = dx^{I} - dx,$$

(рис. 4), где dx^{I} и dx суть последовательные члены последовательности dx. Дифференциалы второго порядка вновь являются переменными; они бесконечно малы по сравнению с дифференциалами первого порядка.

Аналогично, операция $\int$ может быть повторена несколько раз, что приведёт к суммам высшего порядка $\int\int x$, $\int\int y$, и т. д. В практике лейбницева исчисления эти бесконечно большие суммы и повторные суммы встречаются достаточно редко, потому что операция $\int$ прилагается в основном к переменным, которые сами являются бесконечно малыми.

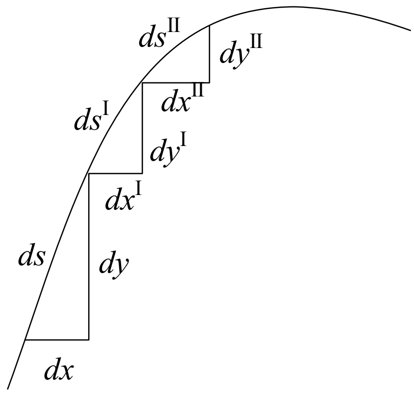

Рис. 4

«Прогрессия переменных»

Я не буду обсуждать здесь правила для операции d, такие как $d\,(x + y) = dx + dy$, и т. п. С большим желанием я вернусь к частной проблеме, относящейся к концепциям переменных, дифференциалов и ломаных с бесконечным числом вершин, о которых шла речь выше.

Разрабатывая свою программу, Лейбниц столкнулся с особенной трудностью, а именно — с неопределённостью дифференциалов. Я смогу лучше всего пояснить эту трудность, задав следующий вопрос:

Имеет ли ломаная с бесконечным числом вершин равные звенья?

–

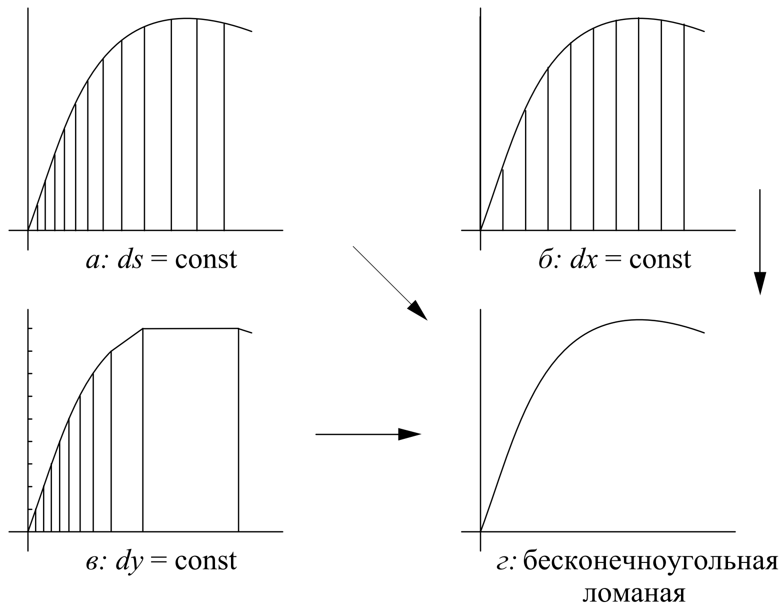

Рис. 5

Очевидно, что мы не можем найти ответ, разглядывая эту ломаную, а стало быть — кривую. Мы должны (рис. 5) представить конечную ломаную, а затем совершить переход. Когда мы делаем это, становится ясно, что на вопрос невозможно ответить. Ломаные, приближающие кривую, могут иметь равные звенья (рис. 5, *а*), но это не обязательно; другие возможности, к примеру, таковы, что будут равными проекции звеньев на оси X или Y (рис. 5, *б* и *в*), и очевидно, что имеется много других возможностей для построения приближающих ломаных с неравными сторонами. Это означает, что понятие «ломаной с бесконечным числом вершин» приводит к неопределённости; мы не знаем *a priori*, от какой конечной ломаной был совершён предельный переход к бесконечноугольной ломаной; поэтому мы не знаем, как дифференциалы меняются вдоль кривой. Возможно, что все ds равны между собой, и тогда все dds будут равны нулю, а dx и dy будут изменяться, и тем самым ddx и ddy не будут равны нулю (в предположении что кривая не является прямой линией). Но может быть и так, что все dx равны между собой, и тогда $dds \neq 0$ и $ddx = 0$, и т. д.

Тем самым в лейбницевом исчислении поведение дифференциалов как меняющихся вдоль кривой переменных зависит от двух вещей:

- от природы кривой, и
- от природы бесконечноугольной ломаной.

Пока природа бесконечноугольной ломаной не уточнена дополнительно, поведение дифференциалов остаётся неопределённым. Бесконечноугольная ломаная зависит от того, что Лейбниц называл «прогрессией переменных». Это выражение удачно выбрано, поскольку, к примеру, если dx фиксировано, переменные зависят или пробегают свои последовательности значений другим образом, чем если бы постоянным было ds.

Конечно, цель лейбницева исчисления состоит в определении дифференциалов как соотносящихся с природой кривой. Но это можно сделать лишь в том случае, если два вида поведения могут быть как-нибудь разделены. Рассмотрим, как это было сделано.

Неопределённость дифференциалов

Один из способов справиться с проблемой неопределённости дифференциалов состоит в том, чтобы раз и навсегда договориться о том, что дифференциалы одной выбранной переменной, к примеру дифференциалы dx абсциссы x, всегда будут считаться постоянными. Тогда приближающая ломаная всегда будет иметь форму, показанную на рис. 5, *б*. Для понимания лейбницева исчисления важно осознать, что Лейбниц не считал этот выход приемлемым. Он хотел сохранить свободу выбора приближающих ломаных, а ещё точнее — прогрессий переменных. Выбор одной переменной в качестве имеющей постоянные дифференциалы является совершенно произвольным; но в геометрических фигурах нет ничего такого, что вынуждало бы отдать эту привилегированную роль переменной x, а не переменной y или любой другой. Лейбниц рассуждал о возможности выбора различных прогрессий переменных так:

> При взятии сумм вовсе не обязательно, чтобы dx или dy были константами и $ddx = 0$, но можно выбрать прогрессию x или y (если кто-либо захочет принять y за абсциссу) такой, как захочется.[10]

Поэтому Лейбниц не хотел исходно придавать одной из переменных специальную роль; он не хотел рассматривать остальные переменные всегда в их отношении к одной избранной переменной. Другими словами, он не рассматривал переменные как функции одной независимой переменной.

Я снова подчеркну тот факт, что переменные лейбницева исчисления не являются функциями; это одна из главных особенностей, отличающих это исчисление от развитых впоследствии форм математического анализа. В самом деле, когда концепция функции заняла центральную роль в позднейшем анализе, проблема независимости дифференциалов отпала.[11]

Лейбниц решил проблему независимости дифференциалов иначе. Он методически развил приёмы и обозначения, позволяющие сохранять независимость и различать два рода изменяемости дифференциалов, один — специально для кривых, другой — порождаемый прогрессией переменных. Эти приёмы, обозначения и стоящая за ними исходная идея — бесконечноугольная ломаная — были восприняты и использовались первыми последователями Лейбница. Позднее они были забыты; можно сказать, что анализ заменил приёмы, переинтерпретировал обозначения и утратил исходную идею. Но эти аспекты существенны для понимания лейбницева исчисления; я хочу пояснить их здесь с помощью нескольких примеров.

---

[10] «Es ist ganz nicht nötig dass die *dx* oder *dy* constantes und die $ddx = 0$ seyen, sondern man assumiert die progression der *x* oder *y* (welches man pro abscissa halten will) wie man es gut findet». (письмо Лейбница фон Боденхаузену, Leibniz, *Mathematische Schriften* (прим. 1), vol. 7, p. 387).

[11] «Differentials» (см. прим. 6) pp. 5–6 и 66–77.

Пример 1. Парабола

Рассмотрим параболу, заданную уравнением

$$ay = x^2.$$

Соотношения между дифференциалами первого и высших порядков для переменных x и y вдоль кривой описываются дифференциальными уравнениями. Эти уравнения принимают различные формы в зависимости от прогрессии переменных. К примеру, если dx предполагается постоянным, дифференциальные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} ady &= 2xdx \\ addy &= 2(dx)^2 \\ ad^3y &= 0 \\ ad^4y &= 0 \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Однако если постоянным предполагается dy, уравнения будут другими:

$$\begin{aligned} ady &= 2xdx \\ 0 &= 2(dx)^2 + 2xddx \\ 0 &= 6dxddx + 2xd^3x \\ 0 &= 6(ddx)^2 + 8dxd^3x + 2xd^4x \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Для других вариантов прогрессии переменных (например, постоянной ds или постоянной ydx) будут образовываться другие наборы дифференциальных уравнений. Однако вполне возможно установить соотношения между дифференциалами применительно ко всем прогрессиям переменных. В случае координат параболы x и y эти соотношения таковы:

$$\begin{aligned} ady &= 2xdx \\ addy &= 2(dx)^2 + 2xddx \\ ad^3y &= 6dxddx + 2xd^3x \\ ad^4y &= 6(ddx)^2 + 8dxd^3x + 2xd^4x \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Отметим, что уравнения для дифференциалов первого порядка не зависят от прогрессии переменных, а для высших — зависят. Пример показывает, что при подходящем выборе прогрессии можно значительно упростить уравнения высших порядков. Это несомненное преимущество свободного выбора прогрессии переменных, и первые последователи Лейбница мастерски использовали эту возможность упрощения формул.

Пример 2. Радиус кривизны

Мой второй пример[12] касается радиуса кривизны. Рассмотрим (рис. 6) кривую C и две точки P и P', расположенные достаточно близко друг от друга. Пусть R — точка пересечения нормалей к кривой, восстановленных в точках P и P'. Радиус кривизны в точке P есть предел длины отрезка PR при $P' \to P$. (Или, как об этом сказал бы сам Лейбниц: возьмём PP' бесконечно малым и рассмотрим точку R пересечения нормалей, восстановленных в точках P' и P; RP есть радиус кривизны.)

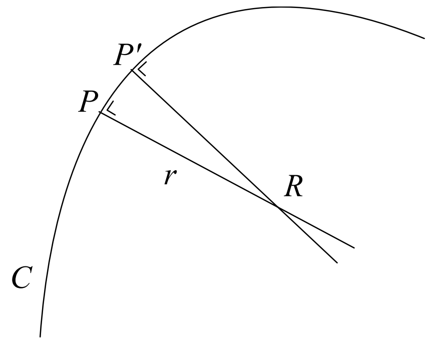

Рис. 6

Лейбницево исчисление даёт формулы для вычисления радиуса кривизны. Эти формулы содержат дифференциалы высших порядков; тем самым они зависят от прогрессии переменных. Вот эти формулы (для обычных прогрессий):

$$r = \frac{ds^3}{dx\,d\,dy} \quad \text{для } dx = \text{const},$$

$$r = \frac{ds^3}{dy\,d\,dx} \quad \text{для } dy = \text{const},$$

$$r = \frac{dx\,ds}{d\,dy} \quad \text{для } ds = \text{const}.$$

В этом случае опять имеется формула, справедливая для любых прогрессий, а именно:

$$r = \frac{dy\,ds^2}{ds\,ddx - dx\,dds}\,.$$

Эти формулы сегодня не употребляются; они могут показаться несколько странными для математиков, пользующихся современным анализом. Однако они обладают собственной элегантностью, особенно в сравнении с современной формулой для радиуса кривизны r графика функции $y = f(x)$ в точке (x, y):

$$r = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}{f''(x)}\,.$$

[12] «Differentials», pp. 35–42.

–

Пример 3. Формула $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Формула $\frac{d^2y}{dx^2}$ известна в современном анализе как формула для второй производной; если $y = f(x)$, то тогда производные обозначаются как

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$
$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Формулы для производных второго и высших порядков являются сегодня единственными, в которых сохранилось старое лейбницево обозначение d^2, d^3, и т. д. для дифференциалов высших порядков. Однако в лейбницевом исчислении эти формулы в том виде, как мы употребляем их сегодня, являются неопределёнными; их интерпретация зависит от прогрессии переменных. Интерпретация этих формул в лейбницевом исчислении совпадает с современной только в том случае, если dx берётся постоянным; для всех других прогрессий переменных математик школы Лейбница будет читать эти формулы иначе, нежели его современный коллега. К примеру, для параболы

$$y = f(x) = \frac{x^2}{a}$$

мы будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{a} = f''(x) \qquad \text{для } dx = \text{const},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{для } dy = \text{const},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a}{a^2+4x^2} \qquad \text{для } ds = \text{const}$$

(я опускаю вычисления). Эта зависимость формул от прогрессии переменных уже не входит сегодня в стандарты математического знания, что видно из того, что мы уже не отмечаем прогрессию переменных (постоянное dx), когда записываем формулу $\frac{d^2y}{dx^2}$ для второй производной. Мы сохранили формулу, но утратили исходную лейбницеву интерпретацию.

Пример 4. Дифференциальная пропорциональность

В связи с формулами примера 1 я отмечал, что дифференциальные уравнения первого порядка одинаковы для всех прогрессий переменных. Это общая черта лейбницева исчисления: уравнения, все дифференциалы которых имеют первый порядок, не зависят от прогрессии переменных. Однако если отношения между дифференциалами первого порядка выражаются другими способами, нежели с помощью уравнений, они также могут зависеть от прогрессии переменных. Это происходит, например, в случае дифференциальной пропорциональности.[13] К примеру, пусть

$$dv :: v.$$

Эта формула описывает движение в сопротивляющейся среде, и она говорит о том, что уменьшение скорости dv пропорционально самой скорости. Эта формула может быть интерпретирована лишь после того, как мы укажем, каким образом следует рассматривать это уменьшение скорости: происходит ли оно за равные (бесконечно малые) промежутки времени, или на равных проходимых расстояниях, или как-нибудь иначе. Эти уточнения относятся к тому, что Лейбниц называл прогрессией переменных; и интерпретация формулы действительно существенно зависит от рассматриваемой прогрессии. К примеру, если взять постоянным dt, когда будут пропорциональны скорость и изменения dv за равные бесконечно малые промежутки времени, то тогда движение будет описываться формулой

$$v = ce^{-t},$$

где c — некоторая постоянная. Но если изменения dv отнесены к равным проходимым расстояниям, то есть если мы рассматриваем прогрессию переменных, в которой ds постоянно (или, что то же самое, vdt постоянно, поскольку $ds = vdt$), это движение описывается формулой

$$v = \frac{c}{t}.$$

Зависимость пропорциональности дифференциалов от прогрессии переменных играла важную роль в дискуссии между Гюйгенсом и Лейбницем, произошедшей около 1690 г. Предметом этой дискуссии было движение в сопротивляющейся среде, и она была вызвана взаимным непониманием двух учёных, возникшем из-за неуказанности прогрессии переменных, по отношению к которой записывались дифференциальные уравнения для различных сопротивляющихся сред.

Дальнейшее развитие

После этих примеров может показаться, что зависимость формул от прогрессий переменных была попросту ненужной помехой. Но в действительности она давала большое преимущество. Первые последователи лейбницева исчисления были настоящими виртуозами в извлечении выгоды из этой зависимости от прогрессии переменных. К примеру, имея дело с дифференциальными уравнениями высших порядков они стремились выбрать прогрессию переменных таким образом, чтобы упростить формулы (см. пример 1). Вычисляя дифференциалы высших порядков при решении механических задач

---

[13] «Differentials», pp. 47–53.

(таких, как задача о форме нагруженных упругих балок или о движении тел в сопротивляющейся среде), они также пользовались неопределённостью дифференциалов. Для такого дифференцирования использовались чертежи, на которых отмечались дифференциалы первого и второго порядков, и эти чертежи часто можно было упростить выбором удобной прогрессии переменных.

Описанные мною обозначения, идеи и приёмы сегодня не употребляются; они утрачены в течение восемнадцатого и девятнадцатого столетий. Я не буду обсуждать здесь причины их исчезновения; отмечу лишь, что имелась некоторая неудовлетворённость в связи с неопределённостью дифференциалов — особенно в случае Эйлера — и в связи с появлением понятия функции.[14]

Глядя назад на это развитие, нельзя сказать, что оно происходило путём отбрасывания неправильных и уродливых частей теории. Рабочие приёмы в основном не были неправильными; я считаю, что они не были и уродливыми. Но они не вписались в дальнейшее концептуальное развитие предмета и потому были отброшены.

В ходе дальнейшего развития анализа исчезли не только приёмы и идеи, связанные с неопределённостью дифференциалов; прочие концептуальные установки лейбницева исчисления также по большей части исчезли или претерпели значительные изменения, в основном из-за той главенствующей роли, которую стало играть в анализе понятие функции.

Различия между лейбницевым исчислением и современным анализом

Я рассматривал неопределённость дифференциалов как сильнейшую иллюстрацию значительной разницы между лейбницевым исчислением и современным анализом. Результаты сравнения двух теорий [15] я представлю в таблице 2:

Прежде всего, две теории различаются по своим базовым понятиям; и объекты, с которыми они имеют дело, также различны. Лейбницево исчисление рассматривает переменные, пробегающие бесконечную последовательность бесконечно близких значений. Эти переменные, как это было показано выше, не являются функциями, потому что никакая переменная изначально не берётся в качестве независимой. Современный анализ, напротив, имеет дело с функциями.

Во-вторых, имеется различие между основными операциями. Лейбницево дифференцирование ставит в соответствие переменной новую, бесконечно малую переменную, называемую её дифференциалом. Современный анализ ставит в соответствие функции новую функцию, называемую её производной; эта функция определяется с помощью предельного перехода. Лейбницева операция $\int$ (для которой я использую лейбницев термин «суммирование», хотя этот термин часто заменялся термином «интегрирование», введённым братьями Бернулли) ставит в соответствие переменной новую, бесконечно большую переменную. Современный анализ ставит в соответствие функции новую функцию, называемую её интегралом.

[14] «Differentials», pp. 66–77.

[15] Для более детального сравнения см. (прим. 4) Baron and Bos «Newton and Leibniz» pp. 54–57, а также мои работы «Differentials» pp. 34–35, «Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition», pp. 92–93.

Наконец, концепция переменных в лейбницевом исчислении содержит неопределённость дифференциалов, которая делается определённой с выбором прогрессии переменных. Проблемы неопределённости дифференциалов в современном анализе не существует, так как в нём рассматриваются функции явно определённых независимых переменных.

ЛЕЙБНИЦЕВО ИСЧИСЛЕНИЕ		СОВРЕМЕННЫЙ АНАЛИЗ
	Базовое понятие	
Переменная		Функция
	Операции	
Нахождение дифференциалов:		Взятие производной:
переменная $\to$ бесконечно малая переменная		функция $\to$ функция
$x \to dx$ $dy \to ddy$		$f \to f'$
Суммирование:		Интегрирование:
переменная $\to$ бесконечно большая переменная		функция $\to$ функция
$x \to \int x$ $ydx \to \int ydx$		$f \to F$ (где $F(x) = \int_a^x f(t)dt$)
	Неопределённость	
Неопределённость дифференциалов, удерживаемая определением прогрессии переменных		Никакой неопределённости в соответствии с понятием функции

Таблица 2

Это сопоставление показывает, что в определённом смысле современный анализ избавился от многих сложностей, присущих лейбницеву исчислению. В нём больше нет бесконечно малых и бесконечно больших количеств; все функции — конечны. Устранена неопределённость дифференциалов и зависимость формул от прогрессии переменных. Но я хочу подчеркнуть ещё раз, что те положения лейбницева исчисления, которые были устранены из математики на пути её развития, не были неправильными или уродливыми. Я поистине надеюсь, что смог показать, что они придавали лейбницеву исчислению богатство построения и даже определённую красоту.

Заключение

В этом коротком изложении мне пришлось опустить многие детали, останавливаясь в основном на технических приёмах. Я надеюсь, что эта сторона дела не закрыла собой возможность общего взгляда на вопросы, которые я хотел отметить:

- Лейбницево исчисление во многих положениях принципиально отличается от современной теории.
- И тем не менее это исчисление является связной, эффективной и красивой теорией само по себе.
- Эта связность, эффективность и красота открываются лишь тому, кто изучает теорию и судит о ней в её собственных терминах, насколько это возможно, а не в терминах теорий, возникших позднее.

Я подчеркнул особую природу лейбницева исчисления и его отличия от современного анализа. Но могут спросить: стоит ли придавать этому такое значение? Как-никак современный анализ был создан современными математиками, Лейбниц же создал совсем другое исчисление — он был слишком оригинальным мыслителем, чтобы изобретать теорию, созданную другими, даже если эти другие пришли после него.