К вопросу о рациональных приближениях $\sqrt{3}$ у Архимеда: новая реконструкция

А. И. Щетников

1. Постановка задачи

1.1. Архимед в «Измерении круга» пользуется для $\sqrt{3}$ двумя рациональными приближениями, одно из которых берётся с недостатком, а другое с избытком:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Эти приближения вводятся Архимедом без какого-либо комментария. Может быть, он получал их в первых предложениях своего сочинения, утраченных ещё в античности. (Аргументы в пользу того, что начальные предложения трактата существовали и были затем утрачены, см. [1, с. 528].) К сожалению, дошедшие до нас античные источники не содержат никаких прямых сведений о методе, которым были получены эти результаты. Многие историки математики пытались реконструировать этот метод, и по вопросу о «приближённых значениях $\sqrt{3}$ у Архимеда» за последние 300 лет выросла обширная литература (подробную библиографию вопроса см. [2], [7], [12], [13]).

1.2. Ряд авторов связывает метод Архимеда с теорией непрерывных дробей и лежащим в её основе алгоритмом последовательного вычитания, употребляемым Евклидом во 2–4 предложениях X книги «Начал» для вынесения суждения о соизмеримости или несоизмеримости величин и для нахождения их общей меры в случае соизмеримости.

Отношение $\sqrt{3}$: 1 можно разложить в непрерывную дробь

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+\ldots}$$

либо алгебраически на основе тождества $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 2$, либо путём последовательного вычитания высоты равностороннего треугольника и половины его стороны (см., к примеру, [2]). Первые подходящие дроби для этого разложения равны

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \underline{\frac{5}{3}}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \underline{\frac{26}{15}}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \underline{\frac{265}{153}}, \frac{362}{209}, \frac{987}{571}, \underline{\frac{1351}{780}} \ldots \quad (1)$$

Нечётные и чётные члены последовательности (1) дают для $\sqrt{3}$ чередующиеся приближения с недостатком и с избытком. В (1) подчеркнуты члены, номера которых кратны трём; мы видим, что архимедовы приближения суть 9-я и 12-я подходящие дроби для разложения $\sqrt{3}$ в непрерывную дробь. Отсюда возникает вопрос: если Архимед получал подходящие дроби для $\sqrt{3}$ последовательно одну за другой, почему он не взял для своих расчётов два соседних приближения из последовательности (1)? Гипотеза о применении Архимедом алгоритма последовательного вычитания ответа на этот вопрос не даёт, и в этом состоит её слабое место.

1.3. Ряд других авторов связывает архимедовы приближения для $\sqrt{3}$ с методом извлечения квадратных корней, описанным Героном Александрийским в «Метрике» и известным ещё древним вавилонянам. Эту реконструкцию впервые предложил в 1883 г. К. Гунрат [11]; из неё же впоследствии исходили и другие авторы работ [2], [3], [8], [10]. Идея вавилонского алгоритма состоит в том, чтобы каждое следующее приближение a_{n+1} для $\sqrt{N}$ получать из предыдущего приближения a_n по схеме

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{N}{a_n}\right) = \frac{a_n^2 + N}{2a_n}.$$

Если положить $a_1 = 5/3$ (3-я подходящая дробь), то следующие приближения, получаемые с помощью вавилонского алгоритма, будут равны $a_2 = 26/15$ (6-я подходящая дробь), $a_3 = 1351/780$ (12-я подходящая дробь), и т. д., так что на каждом шаге будет получаться подходящая дробь с удвоенным по отношению к предыдущей номером; при этом все приближения, начиная с a_2, будут подходить к $\sqrt{3}$ сверху. Что касается приближения снизу 265/153, в данной реконструкции приходится сделать ряд искусственных допущений, никак не вытекающих из сути самого метода.

1.4. Тем самым возникает задача отыскания такой процедуры построения последовательных приближений, которая естественно порождала бы для $\sqrt{3}$ одну за другой подходящие дроби с номерами, кратными трём, и в которой отношения 265/153 и 1351/780 были бы последовательными членами.

Дополнительную осмысленность этой задаче придаёт сохранившийся отрывок из сочинения Диофанта Александрийского «Об измерении поверхностей», в котором сказано: «Архимед показал, что 30 равносторонних треугольников равны 13 квадратам» [5, II, 22_{16}]. Площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $a^2\sqrt{3}/4$. Это соотношение приводит к приближению

$$\sqrt{3} = \frac{4 \cdot S_{\triangle}}{S_{\square}} \approx \frac{4 \cdot 13}{30} = \frac{26}{15},$$

дающему шестую подходящую дробь для $\sqrt{3}$. Таким образом, с именем Архимеда совершенно определённо связываются 6-я, 9-я и 12-я подходящие дроби для $\sqrt{3}$, каковую последовательность вряд ли следует считать случайной.

1.5. Один из способов получения последовательности, содержащей каждую третью подходящую дробь для $\sqrt{3}$, состоит в том, чтобы представить $\sqrt{3}$ как

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sqrt{5^2+2}}{3} = \frac{1}{3}\left(5 + \frac{1}{5+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{10+\ldots}\right).$$

Первые подходящие дроби для этого разложения равны

–

$$\frac{5}{3},\ \frac{26}{15},\ \frac{265}{153},\ \frac{1351}{780},\ \dots, \tag{2}$$

а это и есть нужная нам последовательность! Эту замечательную реконструкцию впервые предложил в 1881 г. Хайлерманн [9]. Её детально проанализировали в своём обзоре Ф. Во и М. Максфельд [13]. Они же отметили, что на языке линейных преобразований эту реконструкцию удобно представлять формулой

$$v_{n+1} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} v_n,$$

где начальный вектор $v_0 = [5, 3]$. В точности такая же реконструкция в качестве наиболее правдоподобной рассматривается и в книге Д. Фаулера [6].

1.6. Впрочем, предложенное Хайлерманном решение пока ещё полностью лишено геометрической интерпретации, а ведь из свидетельства Диофанта мы знаем, что Архимед увязывал свои приближения с процедурой соизмерения площадей квадрата и равностороннего треугольника с равными сторонами. Поэтому в настоящей статье делается попытка отыскать такую *геометрическую конструкцию*, которая порождала бы (2) в качестве последовательных приближений для $\sqrt{3}$. При этом наша цель состоит не в том, чтобы отыскать «аутентичную» реконструкцию метода Архимеда, но всего лишь в том, чтобы дать какое-нибудь не слишком сложное геометрическое построение, приводящее к последовательности (2).

2. Геометрическая реконструкция

2.1. Обозначим приближённое отношение высоты равностороннего треугольника к его стороне как $q_n : p_n$ и положим $u_n = [q_n, p_n]$. Нетрудно показать, что тогда искомое линейное преобразование, задающее переход между двумя последовательными приближениями, должно будет задаваться формулой

$$u_{n+1} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} u_n,$$

где $u_0 = [5, 6]$. Геометрическую основу этой формулы мы и будем искать.

2.2. Рассмотрим сперва вспомогательный чертёж, изображённый на рис. 1. Здесь на противоположных горизонтальных сторонах KL и NM квадрата $KLMN$ построены два равносторонних треугольника KBL и NAM. Стороны этих треугольников продолжены до пересечения с противоположными сторонами квадрата в точках E, F, G, H. Через эти точки проведены вертикальные отрезки EG и FH. Через точки пересечения отрезков EG и FH со сторонами равносторонних треугольников проведены горизонтальные отрезки TU и VW. Наконец, через точки пересечения отрезков TU и VW с другими сторонами равносторонних треугольников проведены вертикальные отрезки PR и QS.

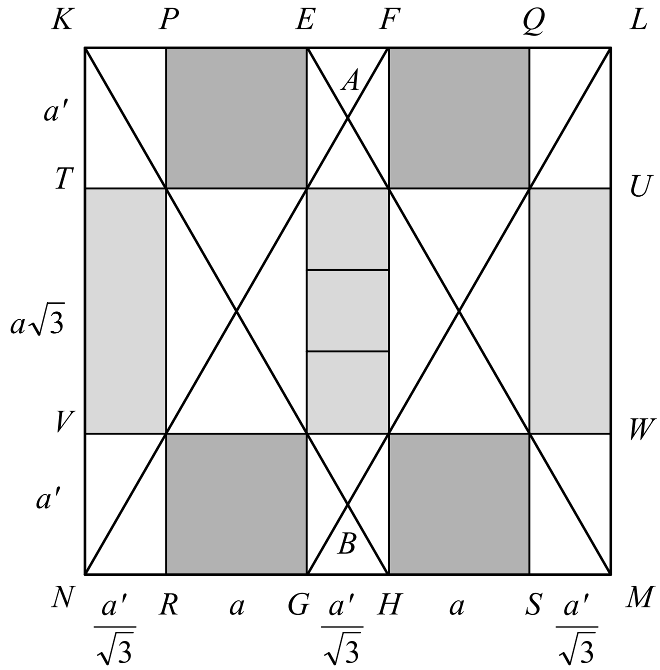

Рис. 1

Покажем, что четыре одинаковых тёмно-серых прямоугольника являются квадратами. Обозначим горизонтальные стороны этих прямоугольников через a, вертикальные через a'. Центральная и крайние вертикальные полосы имеют ширину $a'/\sqrt{3}$, центральная горизонтальная полоса имеет ширину $a\sqrt{3}$. Выразив через эти размеры горизонтальную и вертикальную стороны квадрата, приравняем результаты:

$$2a + 3(a'/\sqrt{3}) = 2a' + a\sqrt{3},$$

что после приведения подобных даёт $a = a'$.

Отсюда следует, что три одинаковых светло-серых прямоугольника имеют соотношение сторон 3 : 1, и каждый из них можно разрезать на три квадрата. Стороны этих квадратов обозначим через $p = a/\sqrt{3}$; высоту равностороннего треугольника со стороной p обозначим через $q = a/2$. Тем самым сторона исходного квадрата $MNPQ$ равна $3p + 4q$.

2.3. Теперь перейдём к основному чертежу, изображённому на рис. 2. Здесь в квадрат $ABED$ встроен равносторонний треугольник CFG, в который вписан ромб $GQHP$, а в этот ромб в свою очередь вписан квадрат $KLMN$, с которым произведены описанные выше манипуляции.

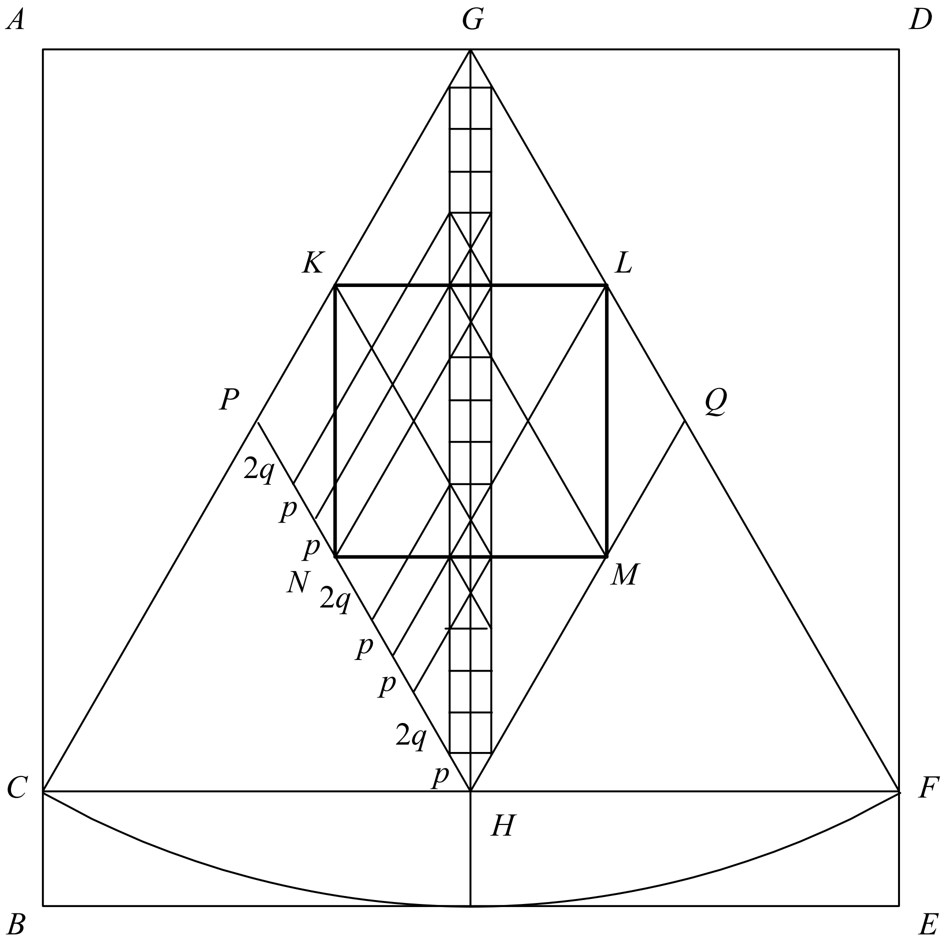

Рис. 2

Этим построением высота GH «большого» равностороннего треугольника GCF выражается через высоту q и сторону p «маленьких» равносторонних треугольников:

$$GH = 9p + 10q.$$

Сторона CF «большого» равностороннего треугольника GCF равна удвоенному отрезку PH, но $PH = 5p + 6q$ (см. чертёж), тем самым

$$CF = 10p + 12q.$$

В результате сторона и высота «большого» равностороннего треугольника оказались выражены через сторону и высоту «маленьких» равносторонних треугольников. Представим оба этих соотношения в виде итерационной формулы

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

с помощью которой можно получать всё более точные и точные последовательные приближения для отношения высоты равностороннего треугольника к его стороне.

2.4. Если начальное значение этого отношения положить равным 5 : 6, то следующие последовательные приближения, вычисляемые по формуле (3), будут равны

$$\frac{5}{6},\ \frac{13}{15},\ \frac{265}{306},\ \frac{1351}{1560},\ \ldots .$$

Увеличив в два раза знаменатель, получим последовательность приближений для отношения площади равностороннего треугольника к площади квадрата, имеющего такую же сторону:

$$\frac{5}{12},\ \frac{13}{30},\ \frac{265}{612},\ \frac{1351}{3120},\ \ldots .$$

(На языке Архимеда эта последовательность читается так: «5 квадратов равны 12 равносторонним треугольникам, 13 квадратов равны 30 равносторонним треугольникам, и т. д.»)

Напротив, увеличив в два раза числитель, получим последовательные приближения для $\sqrt{3}$, совпадающие с (2):

$$\frac{5}{3},\ \frac{26}{15},\ \frac{265}{153},\ \frac{1351}{780},\ \ldots .$$

2.5. Нерешённым остаётся вопрос, каким образом для отношения стороны и высоты равнобедренного треугольника может быть получено начальное приближение 5 : 6. Одно из возможных построений для его получения показано на рис. 3. Сторона BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части точками E и F, и из этих точек восстановлены перпендикуляры EG и FH на боковые стороны. Несложно видеть, что $AG : AB = 5 : 6$. Если для высоты AD принять приближённое равенство $AD \approx AG$, это даст нам необходимое соотношение $AD : AB \approx 5 : 6$.

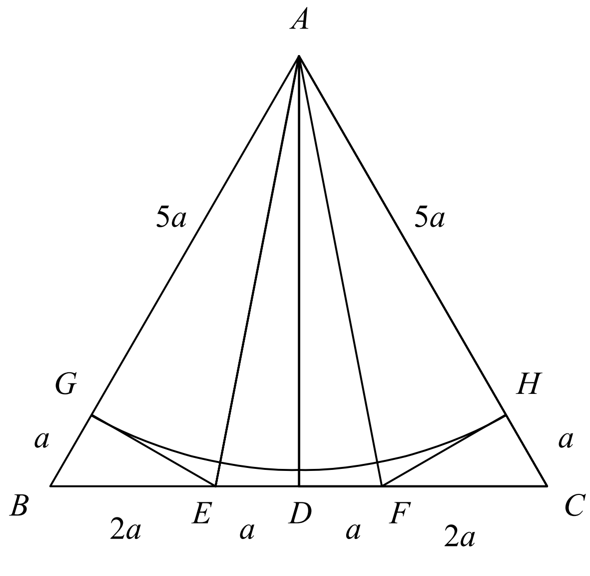

Рис. 3

Впрочем, это приближение (которому соответствует приближение $\sqrt{3} \approx 5/3$), могло быть и просто подобрано численно.

2.6. Конечно, нельзя быть уверенными в том, что Архимед и его предшественники получали свои приближения для $\sqrt{3}$ с помощью построений и рассуждений, изложенных выше. Однако общий ход их рассуждения вполне мог отчасти совпадать с намеченным. Следует заметить, что рассмотренная процедура могла основываться и на других чертежах (быть может, более простых, нежели тот, который мне удалось придумать). Отметим также и то, что предложенный метод последовательных приближений в идейном плане оказался очень близким к алгоритму «семенных логосов» для вычисления «сторонних и диагональных чисел», реконструированному в работе [4].

Библиография

1. АРХИМЕД. *Сочинения*. Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М., Физматгиз, 1962.
2. ВЫГОДСКИЙ М. Я. *Арифметика и алгебра в Древнем мире.* М., Наука, 1967.
3. ЕВКЛИД. *Начала*. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. В 3 т. М., ГТТИ, 1948–50.
4. ЩЕТНИКОВ А. И. Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса». *Математическое образование*, №1(8), 1999, с. 84–94.
5. DIOPHANTUS ALEXANDRINUS. *Opera omnia.* Ed. et latine int. P. Tannery. 2 vol. Leipzig, Teubner, 1893. (Repr. Stuttgart, 1974)
6. FOWLER D. H. *The Mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction.* Oxford, Clarendon Press, 1987.
7. GÜNTHER S. Die quadratische Irrationalitäten der Alten und ihre Entwickelungsmethoden. *Abhandlungen zur Geschichte der Math., Astr. und Phys.,* 1882, s. 1–134.
8. HEATH T. L. *The works of Archimedes.* Cambridge University Press, 1897. (Reprinted: NY, Dover, year unknown).
9. HEILERMANN. Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln. *Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abt.*, **26**, 1881, s. 121–126.
10. HULTSCH F. Die näherungswerte irrationale Quadratwurzeln bei Archimedes. *Gottingen Nachrichten*, 1896, s. 385–393.
11. HUNRATH K. *Über das Ausziehen der Quadratwurzeln bei Griechen und Indern*. Hadersleben, 1883.
12. KNORR W. R. Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation. *Archive for History of Exact Sciences*, **15**, 1976, p. 115–140.
13. WAUGH F. V. & MAXFIELD M. V. Side- and diagonal numbers. *Math. Magazine,* **40**, 1967, p. 74–83.