БЕСКОНЕЧНЫЙ «ЛЖЕЦ»

В. А. Ладов
Томский государственный университет
Томский научный центр СО РАН
ladov@yandex.ru

Vsevolod Ladov
Tomsk State University, Tomsk Scientific Center SB RAS, Russia

The Infinite Liar

Abstract. In this article I discuss the Liar Paradox and consider the history of the genesis of this semantic paradox in antiquity and the ways of overcoming of it in the 20th century. Special emphasis is placed on the contemporary discussions around the Liar Paradox. In particular, I analyze the Infinite Liar of Stephen Yablo. The specific characteristic of this version of the paradox consists in the fact that it is not based on the phenomenon of self-reference. I discuss whether this version of paradox can be formulated in a finite number of steps of reasoning and conclude that infinity is an essential feature of this version of the Liar Paradox.

Keywords: paradox, Liar, St. Paul, Diogenes Laertius, Epimenides, self-reference, hierarchical approach, Russell, Tarski, infinity, Yablo.

* Работа выполнена в рамках программы повышения конкурентноспособности Томского государственного университета. Автор выражает благодарность Е. В. Борисову и В. А. Суровцеву за ряд существенных критических замечаний в отношении чернового варианта данной статьи.

Введение

А. Р. Андерсон в своем исследовании по истории парадокса «Лжеца» приводит стихи 12–13 Главы 1 из Послания к Титу апостола Павла:

> εἶπέ τις ἐξ αὐτῶν ἴδιος αὐτῶν προφήτης
> Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται, κακὰ θηρία, γαστέρες
> ἀργαί. ἡ μαρτυρία αὔτη ἐστὶν ἀληθής
> (Anderson 1970, 1).

Перед нами самая ранняя формулировка данного семантического парадокса. В Синодальном переводе Библии 1876 г. это место из Послания к Титу прочитывается следующим образом:

> Из них же самих один стихотворец сказал:
> «Критяне всегда лжецы, злые звери, утробы

ленивые». Свидетельство это справедливо.

Правда, затем Андерсон замечает, что нельзя забывать и про Диогена Лаэртского, который связал суждение о том, что критяне всегда лгут, с критянином Эпименидом, жившем приблизительно в VII–VIII вв. до н. э., из чего мы можем предположить, что апостол Павел, говоря о критянине-стихотворце, имеет в виду именно Эпименида:

Так или иначе, высказывание, что Критяне всегда лгут, было приписано Эпимениду, гражданину Фаэста (в соответствии с Диогеном Лаэртским, писавшем около тысячи лет после данного факта) и урожденному Кносса – столицы данного острова (Anderson 1970, 2).

Однако, как указывает Андерсон, ни одно сочинение Эпименида не сохранилось, поэтому об исторической достоверности данных событий говорить сложно.

В логической литературе, посвященной парадоксам и анализу понятия истины, можно встретить формулировку «Лжеца» и через отсылку к тексту послания апостола Павла, например, у С. Крипке (Крипке 2002, 151, пер. В. А. Суровцева), и через отсылку к Эпимениду, например, у У. Куайна (Куайн 2010, 191–192, пер. В. А. Ладова, В. А Суровцева). В любом случае, суть затруднения состоит в том, что если тот или иной критянин, произнося «Все критяне лгут», говорит правду, то он сам, будучи одним из жителей острова Крит, становится лгуном.

На протяжении всего XX века доминирующим подходом к решению парадокса «Лжеца» и подобных ему парадоксов был так называемый иерархический подход, развитый Б. Расселом (Рассел, 2006, пер. В. А. Суровцева) и А. Тарским (Tarski 1956). Данный подход предполагал, что все парадоксы возникают в самореферентной среде. На уровне высказываний самореферентным можно считать такое высказывание, которое становится на место своего собственного логического субъекта. Имеем простое атрибутивное высказывание S есть P, помещаем на место S само это высказывание, получаем:

(S есть P) есть P.

Соответственно, решение парадоксов виделось в полном запрете на явление самореферентности как своего рода питательной среды для их возникновения. Именно данный запрет и предполагал иерархический подход в разработанной Б. Расселом теории типов, с одной стороны, и в семантической концепции А. Тарского, с другой. С точки зрения иерархического подхода, все высказывания следует делить на различные логические типы, которые не должны смешиваться между собой. В частности, в рамках иерархического подхода невозможна ситуация подстановки высказывания на место собственного логического субъекта, ибо о данном конкретном высказывании может быть построено высказывание только уже более высокого логического типа, отличного от предыдущего.

Конкретно в отношении «Лжеца» иерархический подход работал следующим образом. Высказывание критянина «Все критяне лгут» не применимо к самому себе, ибо продуцируется на ином логическом уровне, нежели те высказывания, которые становятся предметом рассмотрения в нем самом.

Заслуга Стивена Ябло, небольшая статья которого «Парадокс без самореферентности» (Yablo 1993) оказала значительное влияние на современную логическую литературу, состояла в формулировке «лжеподобного» парадокса, в котором отсутствовало явление самореферентности. Естественно, такая формулировка имела большое значение для логиков и философов, интересующихся проблемами парадоксов. Ибо теперь оказывалось, что классический для XX века иерархический подход, по сути, неверно определял необходимую причину возникновения парадоксов. Явление самореферентности теперь представало как случайное сопутствующее событие при образовании парадокса, а вовсе не его сущностная черта. Соответственно, и метод решения парадоксов, предполагаемый в иерархическом подходе, был поставлен под сомнение.

Ниже кратко рассмотрим суть аргументации С. Ябло (поскольку у Ябло речь идет о предложениях, а не о высказываниях, то далее в рассуждениях мы будем использовать термин «предложение», однако стоит подчеркнуть, что в рамках данной статьи никакого различия между предложениями и высказываниями мы не делаем).

Парадокс Ябло

С. Ябло пишет:

> Вообразим бесконечную последовательность предложений S1, S2, S3…, каждое из которых утверждает, что любое последующее предложение не является истинным:
>
> (S1) для всех k>1, Sk не является истинным.
>
> (S2) для всех k>2, Sk не является истинным.
>
> (S3) для всех k>3, Sk не является истинным.
>
> Предположим, для образования противоречия, что некоторое Sn истинно. Допустим, Sn говорит, что для всех k>n Sk не является истинным. Следовательно (a) Sn+1 не является истинным, и (b) для всех k>n+1, Sk не является истинным. Но (b) есть то, что фактически говорит Sn+1, и это противоречит (a), а именно Sn+1 является истинным! Пусть каждое предложение Sn в данной последовательности не является истинным. Но тогда предложения, следующие за любым данным Sn, не являются истинными, и отсюда Sn истинно! Я заключаю, что самореферентность не является ни необходимым, ни достаточным условием парадокса Лжеца и подобных ему парадоксов (Yablo 1993, 251–252).

Противоречие при заданных условиях будет возникать, с точки зрения Ябло, уже на втором шаге рассуждения.

1) Принимаем, что Sn, которое само формулируется как: «Все последующие предложения не являются истинными», истинно.

2) Последующее предложение «Все последующие предложения не являются истинными», по условию 1), не является истинным.

3) Опять же, по условию 1), следующее за вторым предложение «Все последующие предложения не являются истинными», не должно быть истинным. Но это именно то, что утверждает предложение 2). Следовательно, 2) истинно и ложно.

Однако, если бы противоречие возникало только в качестве следствия принятия посылки, что Sn истинно и не возникало бы при обратном условии, то мы бы имели дело, скорее, не с парадоксом, а с доказательством от противного ложности принимаемой посылки, а именно, ложности, что Sn истинно. Для образования парадокса необходимо показать, что противоречие возникает и при принятии противоположной посылки, а именно, что Sn не является истинным. Поэтому Ябло продолжает. Допустим, все предложения вида «Каждое последующее предложение не является истинным», в том числе и Sn, не являются истинными. Но тогда все последующие за Sn предложения, по определению, не являются истинными. Но это именно то, что утверждает Sn, следовательно, Sn истинно. Налицо парадокс: с чего бы мы ни начинали, предположив сначала, что некоторое Sn истинно, а затем, что ни одно S не является истинным, мы приходим к противоречию.

Самое важное и оригинальное в рассуждении Ябло то, что Sn оказывается не самореферентным. Оно не ссылается на самое себя. Sn всегда говорит только о последующих предложениях, но не о себе самом. Именно этот факт позволяет Ябло заявить, в противовес тому, что говорили классики логики XX века, что самореферентность не является причиной образования парадоксов.

Недостаток парадокса Ябло – бесконечная формулировка

В критической литературе, посвященной работе С. Ябло, существенным недостатком парадокса называли то, что он является бесконечным, т. е. имеет бесконечную формулировку. В этом духе высказываются, например, Т. Йонгелинг, Т. Котсир и Э. Ваттел в своей совместной статье «Самореферентность в конечных и бесконечных парадоксах», где они сами ссылаются сначала на Д. Харди (Hardy 1995), а затем на Г. Приста (Priest 1997):

> Мы дадим аргументацию в той форме, которая представлена у Харди (1995), внесшего вклад в конечные и бесконечные процедуры. Если парадокс Ябло формулируется в форме бесконечной последовательности предложений в формальной системе логики первого порядка, то попытки последовательно описать истинностные значения всех предложений не ведут к противоречию. Это действительно самоочевидно, поскольку формальное доказательство, что не существует последовательного приписывания истинностных значений, должно было иметь конечную длину. Только конечное число предложений S(n) может фигурировать в конечном выводе <…> Для того, чтобы вывести противоречие из приписывания истинных значений,

парадокс должен быть сформулирован в конечной форме, говорит Прист (Jongeling–Koetsier–Wattel 2002, 4–5).

Речь идет о том, что формулировка парадокса оказывается всегда незаконченной, что не является логически корректным, по аналогии с тем, как если бы мы давали определение понятию и, пытаясь прояснить значение всех терминов, входящих в дефиниенс, запутывались бы в бесконечных формулировках. Чтобы помыслить противоречие в приписывании истинностных значений Sn, необходимо держать в уме бесконечное число предложений, на основании рассмотрения которых выводится противоречивость Sn, что невозможно.

Учитывая сформулированный выше контраргумент, представляется актуальным попытаться представить парадокс Ябло в конечном виде. Каков бы ни был результат, можно ожидать, что данное предприятие будет продуктивным. В случае удачной попытки появится возможность говорить об усовершенствованной форме парадокса, защищенной от представленной критической аргументации. В случае если попытка окажется неудачной, это позволит яснее представить специфику рассматриваемого парадокса.

Для того, чтобы попытаться представить усовершенствованную конечную формулировку парадокса Ябло, сначала следует зафиксировать причину его бесконечной формулировки.

Причина бесконечной формулировки

Есть основания предполагать, что причиной бесконечной формулировки парадокса является вид тех предложений, которые берется рассматривать Ябло. В данном парадоксе во внимание принимаются все и только те предложения, которые говорят об иных предложениях. Исследуются предложения вида:

(S1) «Каждое следующее за S1 предложение не является истинным».

(S2) «Каждое следующее за S2 предложение не является истинным»

и т. д.

Таким образом, возникает ситуация, что при построении предложения S1 мы уже обязательно должны предполагать существование предложения S2. При построении предложения S2 мы каким-то образом уже обязательно должны иметь в виду предложение S3 и т.д. Очевидно, что данный ряд уходит в бесконечность. Чтобы что-то сказать даже о самом первом предложении S1, мы уже должны предполагать существование бесконечного ряда предложений.

Следовательно, чтобы попытаться устранить причину бесконечной формулировки парадокса, необходимо каким-то образом трансформировать набор исследуемых предложений, но сделать это так, чтобы сохранить главное достоинство аргументации Ябло – наличие в рассуждении парадоксального, но несамореферентного предложения.

Устранение причины бесконечной формулировки

Во-первых, попытаемся начать формулировку парадокса не с некоего произвольного Sn, что уже предполагает бесконечность предложений, а с вполне конкретного предложения S1:

(S1) «Предложения, следующие за S1, не являются истинными».

И во-вторых, мы можем взять для рассмотрения ряд таких предложений, где не каждое из них будет ссылаться на последующее. Важно, чтобы последнее, участвующее в рассмотрении предложение, говорило не о последующем предложении, а о чем-то ином. Например, оно могло бы описывать некоторое фактическое положение дел, или, для надежности рассуждения, лучше взять какое-либо аналитически ложное предложение, например предложение о неравенстве предмета самому себе:

«$x \neq x$»

Так мы сможем попытаться разорвать бесконечную цепь предложений и сделать рассуждение конечным. Далее сформулируем гипотетический конечный парадокс Ябло.

Гипотетический конечный парадокс Ябло

Возьмем конечную последовательность предложений:

(S1) для всех $k>1$, Sk не является истинным.

(S2) для всех $k>2$, Sk не является истинным.

(S3) $x \neq x$.

Допустим, что S1 истинно. Тогда S2 ложно и S3 ложно. Но в то же время S3 – это именно то, что утверждает S2. Следовательно, S2 истинно. Противоречие. Значит, наша посылка, что S1 истинно, не верна, и S1 не является истинным (в соответствии с доказательством от противного).

Допустим, что все предложения в данной последовательности (т. е. в том числе и S1) не являются истинными. Но тогда S2 и S3 не являются истинными, а это именно то, что утверждает S1. Следовательно, S1 истинно.

С чего бы мы ни начинали, предполагая сначала, что S1 истинно, а затем, что ни одно предложение S не является истинным, приходим к противоречию. При этом: a) формулировка парадокса имеет конечную форму и b) ни одно предложение из указанной последовательности не является самореферентным.

Проблематичность конечной формулировки

Однако при более пристальном рассмотрении мы можем заметить, что предложенная выше конечная формулировка парадокса оказывается проблематичной. Для образования парадокса существенно, чтобы были исчерпаны все возможные варианты посылок, из которых следуют противоречия. Например, корректная формулировка конечного парадокса выглядела бы следующим образом: 1) предположим, что некоторое (любое) из трех рассматриваемых предложений истинно – приходим к противоречию; 2) предположим, что ни одно из трех рассматриваемых предложений не является истинным – приходим к противоречию. Таким образом, мы исчерпали бы все логические возможности в нашем рассуждении: либо $\exists x T(x)$, либо $\forall x \neg T(x)$, где x – предложение, T – быть истинным. Но в случае приведенного выше гипотетического конечного парадокса мы начинаем с предположения истинности не некоторого (любого), а конкретного предложения S1, приходим к противоречию, затем предполагаем, что ни одно S не является истинным, приходим к противоречию. Очевидно, при этом, что имеется, по крайней мере, еще одна нерассмотренная возможность образования парадокса, а именно, допустим, что 1) S2 истинно; 2) ни одно S не является истинным. Если S2 истинно, то S1 ложно и S3 ложно, и в этом случае никакого противоречия не возникает. Значит, рассматривая приведенную выше конечную последовательность предложений, мы не можем начать с некоторого произвольного S, чтобы получить противоречие. В определенном случае противоречие возникает, тогда как в другом – нет. Это, в свою очередь, означает, что гипотетический конечный парадокс Ябло оказывается псевдопарадоксом. Данное рассуждение не демонстрирует противоречия при любом возможном варианте исходных посылок.

Выводы

Таким образом, мы видим, что возможность начать рассуждение с произвольно выбранного Sn играет ключевую роль в формулировке парадокса Ябло. Именно произвольное Sn позволяет рассмотреть две противоречащие посылки, которые, в соответствии с законом исключенного третьего, предполагают все допустимые варианты рассуждения: $A \vee \neg A$, где под A подразумевается $\exists x T(x)$, а под $\neg A$, соответственно, $\forall x \neg T(x)$.

В свою очередь, возможность начать рассуждение с произвольного Sn предполагает предложения унифицированной формы. Поскольку для образования парадокса также важно, чтобы в нем содержались предложения с предикатом истины, логическим субъектом которых выступали бы следующие за ними предложения, и поскольку все предложения должны иметь унифицированную форму, ясно, что нам необходимо мыслить бесконечный ряд предложений, в каждом из которых приписывается отрицательный предикат истины для всех последующих предложений.

В результате проведенного анализа мы приходим к выводу, что бесконечная формулировка является существенной характеристикой парадокса Ябло, без которой он не мыслим.

Является ли указанная характеристика данного парадокса действительно в каком-то смысле ущербной, не позволяющей дать ясное понимание приводимой аргументации, как это подчеркивали критики Ябло? Ответ на этот вопрос не столь очевиден, как предполагали, например, Д. Харди и Г. Прист, и рассмотрение этой проблемы может быть предметом дальнейший исследований.

БИБЛИОГРАФИЯ

Крипке, С. (2002) «Очерк теории истины», *Язык, истина,* существование, пер. с англ. В. А. Суровцева. Томск: 151–183.

Куайн, У. В. О. (2010) «Заметки по теории референции», Куайн, У. В. О. *С точки зрения логики*, пер. с англ. В. А. Ладова, В. А. Суровцева. Москва: 188–199.

Рассел, Б. (2006) «Математическая логика, основанная на теории типов», Рассел, Б. *Логика, онтология, язык*, пер. с англ. В. А. Суровцева. Томск: 16–62.

Anderson, A. P. (1970) "St. Paul's Epistle to Titus," R. L. Martin, ed. *The Paradox of the Liar*. New Haven and London: 1–11.

Hardy, J. (1995) "Is Yablo's Paradox Liar-like?" *Analysis*, *55*, 197–198.

Jongeling, T. B., Koetsier, T., Wattel, E. (2002) "Self-Reference in Finite and Infinite Paradoxes," *Logique & Analyse* 177, 1–16.

Priest, G. (1997) "Yablo's Paradox," *Analysis 57*, 236–242.

Tarski, A. (1956) "The Concept of Truth in Formalized Languages," A. Tarski, ed. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford: Oxford University Press: 152–278.

Yablo, S. (1993) "Paradox without Self-reference," *Analysis 53*, 251–252.