МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ АНТИЧНОГО СОФИСТИЧЕСКОГО «ПАРАДОКСА КРОКОДИЛА» В РАМКАХ СОВРЕМЕННОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

А. Н. Ахвледиани

Международное научное общество «INCOL» (Израиль)
alexanderakhvlediany@yandex.ru

Alexander Akhvlediany (Scientific Society «INCOL», Israel, Carmiel)

Solution for the ancient sophistic "Crocodile Paradox" in classical formal zero order logical system

Abstract: "Crocodile Paradox" is the famous paradox in ancient sophistic logical system. In this paper it is shown that it is possible to construct the solution for this paradox in modern classical formal zero order logical system.

Keywords: Paradox, formal logic, zero order logical system

В настоящей работе исследуется известный софистический «Парадокс крокодила» и предлагается вариант его решения на основе современной классической формальной логики нулевого порядка. Формализация представленного решения проверена вычислительной логической программой математического пакета MATCAD 12.

Из истории античной логики известно, что одним из наиболее сильных философских и логических направлений Древней Греции являлось учение софистов. В широком смысле слова термин «софист» означал *искусного или мудрого человека*. Старшие софисты – Протагор, Горгий, Продик и Гиппий – были выдающимися учеными своего времени. До софистов философы в основном занимались исследованием природы, софисты же сделали главным предметом своего

ΣΧΟΛΗ Vol. 5. 1 (2011) 74–82
www.nsu.ru/classics/schole

философского исследования человека и его деятельность. На первое место выступают вопросы политики, этики, теории государства и права, начинают разрабатываться риторика, филология, грамматика и т. д. Протагор и Продик одними из первых стали заниматься вопросами научного языкознания; Протагор, Горгий и Трасимах одними из первых в Греции стали создавать теорию риторики.

Знаменитое положение софиста Протагора – «человек есть мера всех вещей» – исходило из учения Гераклита о всеобщей текучести и изменчивости всего существующего. Поскольку в каждый момент изменяется, как воспринимающий субъект, так и воспринимаемый им объект, то каждое восприятие каждого человека относительно и субъективно. *По мнению софистов, для каждого истинно то, что ему кажется таковым в данное время.*

Учение Протагора *о человеке, как мере всего существующего*, о том, что *у каждого человека в каждый момент особая истина*, что *одной и той же вещи могут быть одновременно приписаны противоположные свойства*, положило начало релятивистской и субъективистской теории познания. Релятивизм софистов получил особенно яркое выражение в анонимном сочинении «Двоякие речи», в котором развивается учение об относительности человеческих понятий о добре и зле, прекрасном и безобразном, справедливости и несправедливости, истине и лжи. Автор говорит, *что и судьи одну и ту же речь могут расценивать и как ложь, и как истину*. Одна и та же вещь бывает одновременно и легкой и тяжелой, в зависимости от того, с какой другой вещью она сравнивается.

Разрабатывая теорию красноречия, софисты не могли не затронуть вопросов логики, рассматривая их под углом зрения техники спора. Протагор написал специальное сочинение «Искусство спорить». Исходя из положения, что *о всякой вещи есть два противоположных мнения*, он первый *стал применять диалог, в котором два собеседника в споре защищали два противоположных взгляда.*

Софисты были весьма искусными изобретателями парадоксов. В широком смысле слова парадокс – это положение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися, ортодоксальными мнениями. Обычно парадокс представляет собой начало такого исследования, некое нарушение конвенции. Парадокс в более узком значении – это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. Наиболее острая форма парадокса – антиномия, рассуждение, доказывающее приемлемость двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого.

Традиция изобретать и выявлять парадоксы сохранилась и в последующем развитии логики как науки, вплоть до нового времени. Обычно парадоксы строятся на том, что логика входящих в них утверждений, отличается по своим логическим выразительным свойствам от логики обычных высказываний аристотелевской классической традиционной логики.

В настоящей работе мы предлагаем к рассмотрению вариант решения одного из известных парадоксов – «Парадокса крокодила», автором которого считается античный сицилийский софист Коракс. Вначале изложим суть парадокса:

«Крокодил выхватил у египтянки, стоявшей на берегу реки, ее ребенка. На ее мольбу вернуть ребенка крокодил, пролив, как всегда, крокодилову слезу, ответил:

— Твое несчастье растрогало меня, и я дам тебе шанс получить назад ребенка. Угадай, отдам я его тебе или нет. Если ответишь правильно, я верну ребенка. Если не угадаешь, я его не отдам.

Подумав, мать ответила:

— Ты не отдашь мне ребенка.

— Ты его не получишь, – заключил крокодил. – Ты сказала либо правду, либо неправду. Если то, что я не отдам ребенка, – правда, я не отдам его, так как иначе сказанное не будет правдой. Если сказанное – неправда, значит, ты не угадала, и я не отдам ребенка по уговору.

Однако матери это рассуждение не показалось убедительным:

— Но ведь если я сказала правду, то ты отдашь мне ребенка, как мы и договорились. Если же я не угадала, что ты не отдашь ребенка, то ты должен мне его отдать, иначе сказанное мною не будет неправдой.

Кто прав: мать или крокодил? К чему обязывает крокодила данное им обещание? К тому, чтобы отдать ребенка или, напротив, чтобы не отдать его?»

Исследование «Парадокса крокодила» будем вести на основе современной классической формальной логики нулевого порядка. Далее приводятся необходимые базовые определения и правила упомянутой логической системы.

Базовыми понятиями логики высказываний нулевого порядка являются:

- Пропозициональная переменная – переменная, значением которой может быть логическое высказывание.
- Пропозициональная формула – определяется индуктивно следующим образом:

а) Если P – пропозициональная переменная, то P – формула.

б) Если A – формула, то ¬A – формула.

в) Если A и B формулы, то

$$(A \vee B) \qquad (A \wedge B) \tag{1}$$

$$\Rightarrow (A, B) \tag{2}$$

также формулы.

В формулах **(1)** на первом месте стоит дизъюнкция высказываний A и B, соответствующая логической связке «A или B». На втором месте стоит конъюнкция, соответствующая логической связке «A и B».

- Каждая формула может быть получена за конечное число шагов при помощи рассмотренных выше правил.
- Знаки

$$\neg\blacksquare \qquad \blacksquare \wedge \blacksquare \qquad \blacksquare \vee \blacksquare \qquad \blacksquare \rightarrow \tag{3}$$

обозначают отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию (логическое следование). Например ¬A означает отрицание высказывания A. Выражение **(2)** означает, что из высказывания A следует высказывание B. Импликация обозначается также A→B (A имплицирует B). Приведенные в выражении **(3)** знаки называются пропозициональными логическими связками.

- Подформулой называется часть формулы, сама являющаяся формулой. Собственной подформулой называется подформула, не совпадающая со всей формулой.
- Оценкой пропозициональных переменных называется функция из множества всех пропозициональных переменных в множество истинностных значений {0, 1}. *Основной задачей логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных.* Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности связок.

В классической формальной логике нулевого порядка основные законы классической формальной логики Аристотеля являются тождественно истинными формулами. Формализация основных трех законов логики Аристотеля имеет следующий вид:

Закон тождества

Каждое высказывание тождественно равно самому себе:

$$A=A \tag{4}$$

Закон о непротиворечии

Никакое высказывание не равно своему отрицанию :

$$A\neq\neg A \tag{5}$$

Закон об исключенном третьем

Для каждого высказывания A, либо само высказывание истинно, а его отрицание ¬A ложно, либо само высказывание A ложно, а его отрицание ¬A истинно, *третья возможность исключена.*

$$A \oplus \neg A \tag{6}$$

В обозначениях формул **(4)** и **(5)**, A – некоторое высказывание, ¬A – отрицание высказывания A. В формуле **(6),** $\oplus$ – логический оператор, соответствующий исключающему «либо».

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)=1$, на всех наборах $a_1, a_2,\ldots,a_n$, то формула A – тождественно истинна, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)=1$ не выполняется, то формула A – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой*.

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)=0$, на всех наборах $a_1, a_2,\ldots,a_n$, то формула A – *признается тождественно ложной или тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула A – *признается выполнимой и непротиворечивой.*

Определение формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний

Логическое исчисление называется формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой. Иначе говоря, логическое исчисление называется формально непротиворечивым, если в нем не существует такая внешняя формула A, что доказуема как формула A, так и формула ¬A. В противном случае логическое исчисление является противоречивым.

Проблема формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние доказуемые формулы вида A и ¬A, то такое исчисление является формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная теорема.

Теорема о непротиворечивости классического формального исчисления высказываний

Классическое формальное исчисление высказываний обладает свойством формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

Теперь приступим к логическому моделированию «Парадокса Крокодила» в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

Введем следующие обозначения. Пусть А – логическая формула:

$$A = \text{«крокодил вернет ребенка матери»} \quad \textbf{(7)}$$

Тогда:

$$\neg A = \text{«неверно, что крокодил вернет ребенка матери»} \quad \textbf{(8)}$$

Обозначим через В – формулу матери, содержащую утверждение о том отпустит ли крокодил ее ребенка или нет. Тогда ¬В – отрицание этой формулы.

Исходя из принятых выше обозначений и текста парадокса, условия крокодила моделируются следующими двумя формулами:

$$\Rightarrow(B = 1, A) \quad \textbf{(9)}$$

$$\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) \quad \textbf{(10)}$$

Словесная интерпретация формулы **(9)** выглядит следующим образом: «если формула матери истинна, то крокодил вернет ребенка матери». Словесная интерпретация формулы **(10)** выглядит следующим образом: «если формула матери не истинна, то неверно, что крокодил вернет ребенка матери». Таким образом, из приведенных выше утверждений следует, что матерью ребенка должна быть сформулирована такая логическая формула, которая вынуждает крокодила отдать ей ребенка в соответствии с его собственными условиями.

Вычислим векторы значений истинности формул условий крокодила на множестве бинарных логических операций, определенных современной классической формальной логикой нулевого порядка, поскольку формулы **(9)** и **(10)** являются бинарными логическими формулами. В соответствии с принятыми в классической формальной логике правилами положим:

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

Формулы **(11)** обеспечивает рассмотрение конечного множества всех возможных конкретных комбинаций значений переменных В и А. Используя для вычисления векторов значений истинности условий крокодила оператор векторизации, предусмотренный логической вычислительной программой математического пакета MATCAD 12, получим:

$$\overrightarrow{\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\textbf{(12)}$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow(\mathrm{B}\neq 1,\neg\mathrm{A})}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\textbf{(13)}$$

Таким образом, из формул **(12)** и **(13)** мы видим, что в соответствии с базовыми определениями классической логики нулевого порядка, крокодилом были выдвинуты выполнимые и непротиворечивые логические формулы.

Необходимо отметить, что в соответствии с условиями парадокса у крокодила имеются значительные логические преимущества перед матерью ребенка. Это выражается в том, что у крокодила имеется возможность вариации логических связок, т. е. возможность свободного выбора в дизъюнкции и конъюнкции между формулами его условий, а также возможность неприменения логических связок между ними, поскольку в его собственных условиях это прямо не оговорено.

Исследуем теперь формулу матери, приведенную в тексте парадокса. По своей логической структуре она совпадает с формулой **(8)**, т. е. мать ребенка выдвигает логическую формулу:

$$\mathrm{B}=\neg\mathrm{A}\qquad\textbf{(14)}$$

В этом случае у крокодила появляется возможность объявить, что формулы его условий подразумевают их конъюнкцию. Тогда на множестве бинарных логических операций получаем следующие формулы:

$$\overrightarrow{(\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})\wedge\Rightarrow(\mathrm{B}\neq 1,\neg\mathrm{A}))}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\textbf{(15)}$$

$$\overrightarrow{(B = \neg A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(16)}$$

Формула **(15)** представляет собой конъюнкцию логических формул условий крокодила. Формула **(16)** представляет собой логическую формулу матери ребенка.

В рассматриваемом случае аргументация крокодила имеет следующий вид.

1. Выдвинутая матерью логическая формула логически несовместна с условиями крокодила:

$$\overrightarrow{\left[\left(\left(\Rightarrow(B = 1, A) \wedge \Rightarrow(B \neq 1, \neg A)\right)\right) \wedge (B = \neg A)\right]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(17)}$$

2. Формула матери **(14)**, подставленная вместо B в формулу конъюнкции условий крокодила, приводит к тождественно ложной формуле на множестве унарных логических операций, а это означает, что с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка, матерью ребенка была высказана такая логически формула, которая в сочетании с условием конъюнкции формул крокодила приобрела логически тождественно противоречивый вид:

$$\left[\left(\Rightarrow(\neg A = 1, A)\right) \wedge \left(\Rightarrow(\neg A \neq 1, \neg A)\right)\right] = 0 \quad \textbf{(18)}$$

Поэтому в рассматриваемом случае у крокодила в соответствии с его собственными условиями появляются все основания не отдать ребенка матери. Таким образом, *предлагаемое нами решение рассматриваемого парадокса заключается в том, что приведенная в нем логическая формула ответа матери в контексте конъюнкции формул условий крокодила оказывается логически противоречивой.*

Необходимо отметить, что некоторые приведенные выше логические формулы имеют существенные отличия от логических формул аристотелевской логики. В соответствии с основными законами аристотелевской логики **(4)–(6)**, высказывание должно быть либо истинным, либо ложным, *третья возможность исключена*. Этого мы никак не можем утверждать в отношении формул крокодила **(12)** и **(13)**, поскольку утверждения об их истинности или ложности оказываются недоказуемыми, хотя и непротиворечивыми:

$$\overrightarrow{(\Rightarrow(B = 1, A) = 1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{(\Rightarrow(B = 1, A) = 0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

$$\overrightarrow{(\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) = 1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{(\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) = 0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(20)}$$

По нашему мнению, приведенное выше исследование свидетельствует о возможности реконструкции и моделирования софистической логической техники в рамках классической формальной логики нулевого порядка, что может представлять определенный интерес с точки зрения вопросов исследования античных софистических философских и логических традиций, а также их философских и логических архетипов в некоторых классических формальных и полуформальных логических и математических теориях нового времени.