АЛГОРИТМ РАЗВОРАЧИВАНИЯ ВСЕХ ЧИСЛОВЫХ ОТНОШЕНИЙ ИЗ ОТНОШЕНИЯ РАВЕНСТВА И ИДЕАЛЬНЫЕ ЧИСЛА ПЛАТОНА

А. И. Щетников

1. Источники, в которых описан «алгоритм Никомаха»

Настоящая статья посвящена алгоритму разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства, открытому древнегреческими математиками. Этот алгоритм известен нам по двум неопифагорейским трактатам II в. н. э. Однако его безымянный автор жил в гораздо более раннюю эпоху, не позднее III в. до н. э., а скорее всего, даже раньше — предположительно в IV в. до н. э., во времена Платона и его школы.

Первое сочинение, в котором сохранилось описание этого алгоритма — это *Введение в арифметику* Никомаха Геразского (II в.). Никомах описывает этот алгоритм весьма подробно (I 23.4–II 2), однако приводимое им описание лишено каких-либо обоснований и доказательств. Комментируя русский перевод *Введения*, я стал для краткости называть этот алгоритм «алгоритмом Никомаха», — хотя понятно, что сам Никомах к его открытию не имел никакого отношения.

В последующие века *Введение в арифметику* неоднократно комментировалось и переводилось на другие языки. До нас дошли комментарии Ямвлиха (III в.), а из более поздних авторов — Асклепия и Иоанна Филопона (оба — VI в.). Во всех этих комментариях устройство алгоритма излагается по исходному тексту Никомаха, без восстановления доказательств.

Второе описание этого алгоритма имеется в трактате Теона Смирнского (II в.) *Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона*. Оно построено по той же схеме, что и во *Введении в арифметику*, но более кратко. Эта краткость восполняется тем, что Теон называет те источники, из которых он заимствует свои материалы — сочинение *Платоник*, принадлежащее знаменитому александрийскому учёному Эратосфену (III в. до н. э.), и трактат перипатетика Адраста (I в. н. э.).

2. Классификация числовых отношений

Для понимания дальнейшего познакомимся с классификацией соотнесённых количеств, изложенной у Никомаха и Теона. Согласно этой классификации,

> для соотнесённого количества наивысшим родовым делением служит деление на равенство и неравенство… Неравное подлежит дальнейшему разделению, и одно будет большим, а другое меньшим… Большее подразделяется на пять видов, каковые суть многократное (πολλαπλάσιον), сверхчастное (ἐπιμόριον), сверхмногочастное (ἐπιμερές), многократно-и-сверхчастное (πολλαπλασιεπιμόριον), многократно-и-

ΣΧΟΛΗ Vol. II.1 (2008)

сверхмногочастное (πολλαπλασιεπιμερές). И противоположное, меньшее, сходным образом подразделяется на пять видов (*Введение* I 17, 2–8).

Дадим описание пяти видов отношения большего к меньшему. Всюду ниже $m > 1$, $1 < k < n$, и k взаимно просто с n.

• Многократное отношение $A : B = m$ — когда большее число содержит в себе меньшее целиком несколько раз.

• Сверхчастное отношение $A : B = 1 + \frac{1}{n}$ — когда большее число содержит в себе меньшее один раз с добавлением ещё одной его доли.

• Сверхмногочастное отношение $A : B = 1 + \frac{k}{n}$ — когда большее число содержит в себе меньшее один раз с добавлением нескольких его долей.

• Многократно-и-сверхчастное отношение $A : B = m + \frac{1}{n}$ — когда большее число содержит в себе меньшее несколько раз с добавлением ещё одной его доли.

• Многократно-и-сверхмногочастное отношение $A : B = m + \frac{k}{n}$ — когда большее число содержит в себе меньшее несколько раз с добавлением нескольких его долей.

Эта классификация соотнесённых количеств охватывает только рациональные отношения, представимые парами натуральных чисел; отношения несоизмеримых величин остаются за её пределами.

3. Перевод текста: Никомах

(I 23.4 и сл.) …И этот изящнейший и необходимейший путь к познанию природы целого ясным и недвусмысленным образом показывает нам, что прекрасное, определённое и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределённым, неограниченным и безобразным; и далее, что части и виды неограниченного и неопределённого приобретают благодаря первому свою форму и границы, и находят подобающий им порядок и расположение, и становятся доступными измерению, и приобретают некоторое подобие и одноимённость. Ведь понятно, что разумная часть души приводит в порядок неразумную часть, её порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит её к равенству и тождеству. А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые этические добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества.

Теперь нам нужно как следует рассмотреть природу этой теоремы, согласно которой можно доказать, что всё многообразие видов неравенства и разделов этих видов сводятся к первому и единственному равенству, как к их матери и корню.

Пусть нам даны равные числа по три, и первыми будут единицы, затем — три двойки, затем — тройки, четвёрки, пятёрки, и сколь угодно далее. И из них, прямотаки по божественному, а не по человеческому повелению, а иначе сказать — по самой природе, первыми возникают многократные, а из них сперва двукратные, затем трёхкратные, затем четырёхкратные, затем пятикратные, и этот порядок мы можем продолжать до бесконечности. Вторыми же — сверхчастные, и здесь сначала появляется первый вид, полуторное, за ним сверхтретье, а за ним прямо по порядку идут сверхчетвертное, сверхпятерное и далее аналогично до бесконечности. Третьими — сверхмногочастные, и здесь сначала появляются сверхдвухчастные, а прямо за ними сверхтрёхчастные, сверхчетырёхчастные, сверхпятичастные, и сколь угодно далее в том же порядке.

И тебе нужны такие правила, которые будут подобны неизменным и нерушимым законам природы, и по которым всё вышеназванное будет расходиться во все стороны от равенства без каких-либо исключений. И эти правила таковы: «Положи первый член равным первому, второй равным сумме первого и второго, а третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего». И если ты будешь действовать по этому закону, ты сначала получишь по порядку все виды многократного, исходя из трёх членов равенства, и они взойдут и вырастут без твоей помощи и участия; причём непосредственно из равенства возникнет двукратное, затем из двукратного — трёхкратное, из трёхкратного — четырёхкратное, из него — пятикратное, и так далее всегда в том же порядке.

А из этих многократных, если переставить их члены, прямо-таки по природной необходимости применением этих же трёх правил возникают сверхчастные, причём не случайно и беспорядочно, но в присущей им последовательности. И из переставленного первого двукратного возникает первое полуторное, из второго трёхкратного — второе в своём порядке сверхтретье, и сверхчетвертное — из четырёхкратного, и далее названные по именам следующих.

И опять, из этих упорядоченных сверхчастных, если переставить их члены, естественно возникают сверхмногочастные: из полуторного — сверхдвухчастное, из сверхтретьего — сверхтрёхчастное, из сверхчетвертного — сверхчетырёхчастное, и далее до бесконечности по этой же аналогии.

А если члены не переставлять, то прямо из этих же упорядоченных сверхчастных по тем же правилам возникают многократно-и-сверхчастные: двукратное-и-половинное из первого полуторного, двукратное-и-сверхтретье из второго сверхтретьего, двукратное-и-сверхчетвертное из третьего сверхчетвертного и так далее.

Итак, из сверхчастных с перестановкой членов возникают сверхмногочастные, а без перестановки — многократно-и-сверхчастные, и это происходит одним и тем же способом и по одним и тем же правилам, но либо с сохранением порядка членов, либо с обращением его, и получившиеся числа показывают остальные сопряжения.

Описанное выше упорядоченное производство, которое идёт либо в прямом порядке, либо с перестановкой членов, мы рассмотрим теперь на примерах.

Из сопряжения и пропорции полуторного, переставленного так, чтобы оно начиналось с большего члена, составляется сверхмногочастное сверхдвухтретье сопряжение; а если оно прямо начинается с меньшего члена, то получается многократно-и-сверхчастное сопряжение, а именно двукратное-и-половинное. К примеру, из 9 6 4 получается 9 15 25 либо 4 10 25. Из сверхтретьих, когда они начинаются с большего члена, в сверхмногочастном получается триждысверхчетвертное, а когда с меньшего — двукратное-и-сверхтретье. К примеру, из 16 12 9 получается 16 28 49 либо 9 21 49. Из сверхчетвертных, когда они начинаются с большего члена, в сверхмногочастном получается четыреждысверхпятерное, а когда с меньшего члена, во многократно-и-сверхчастном получается двукратное-и-сверхчетвертное. К примеру, из 25 20 16 получается 25 45 81 либо 16 36 81.

И в том, что получается обоими способами, последний член всегда будет одним и тем же квадратом, а первый — наименьшим, и оба крайних члена всегда будут квадратами.

А относящиеся к другим видам сверхмногочастные или многократно-и-сверхмногочастные получаются иным образом из сверхмногочастных. Так, из дваждысверхтретьих, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-дваждысверхтретьи; а когда начинаются с большего — триждысверхпятерные. Так, из 9 15 25 получается либо 9 24 64, либо 25 40 64. А из триждысверхчетвертных, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-триждысверхчетвертные; а когда начинаются с большего — четыреждысверхсемерные. К примеру, из 16 28 49 получаются либо 16 44 121, либо 49 77 121. И также из четыреждысверхпятерных, каковы 25 45 81, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-четыреждысверхпятерные, каковы 25 70 196; а когда начинаются с большего — пятьюсверхдевятые, каковы 81 126 196. И аналогичные согласованные результаты можно продолжать до бесконечности.

(II 1–2) Элементом называется и является то последнее, из чего всё слагается и на что всё разлагается (к примеру, буквы являются элементами звучащей речи, ибо из них слагается произносимая речь и на них она в итоге разлагается; а звуки являются элементами мелодии, ибо из них она изначально слагается и на них разлагается; а так называемыми общими элементами всего космоса являются четыре простых тела: огонь, вода, воздух и земля, — ведь из них как из первых состоит вся природа, и на них же мы её в конце концов мысленно разлагаем). Мы показали, что равенство является элементом для соотнесённого количества; а для количества самого по себе первоначальными элементами являются единица и двойка, из которых как из последних всё слагается до бесконечности и на которые мы мысленно всё разлагаем.

Мы также показали, что распространение и нарастание неравного идёт от равенства и что оно прямо упорядочено по всем сопряжениям согласно трём правилам. И чтобы убедиться в том, что равенство поистине является элементом, осталось показать, что разложение завершается на нём же. Рассмотрим для этого нашу процедуру.

Представь себе три члена в любом сопряжении и пропорции, будь оно многократным, или сверхчастным, или сверхмногочастным, ими многократно-и-сверхчастным, или многократно-и-сверхмногочастным, лишь бы только средний член относился к меньшему так же, как больший к среднему. Вычти меньший член из среднего, будь он по порядку первым или же последним, и установи меньший член первым членом твоей новой прогрессии; на второе место установи то, что осталось от второго члена после вычитания; а потом вычти сумму нового первого члена и удвоенного нового второго члена из оставшегося, наибольшего из данных членов, и установи разность третьим членом, — и получившиеся числа будут иметь некоторое новое сопряжение, более примитивное по природе.

И если ты снова таким же способом произведёшь вычитание этих трёх членов, ты обнаружишь, что они преобразуются в три новых члена более примитивного вида; и ты найдёшь, что эта последовательность будет всегда продолжаться, пока не дойдёт до равенства. А отсюда с необходимостью становится очевидным, что равенство является элементом для соотнесённого количества.

4. Перевод текста: Теон

(107–111) Адраст показывает, что отношение равенства является начальным и первым, и пропорция тоже, а все прочие отношения и пропорции из них составляются и в них разрешаются. Эратосфен говорит, что всякое отношение возрастает или по интервалу, или своими членами; но равенству никакой интервал не причастен, так что оно может возрастать лишь своими членами. Взяв три величины, составим из них пропорцию и покажем, что вся математика состоит из количественных пропорций, и что [равенство] является началом, элементом и природой пропорции. Эратосфен говорит, что он опустил доказательства. Но Адраст специально показывает, что каковы бы ни были три члена пропорции, из них можно составить три других, положив первый равным первому, второй — сумме первого и второго, третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего, и эти три члена опять составят пропорцию.

Из пропорции с равными членами возникает двукратная пропорция, из двукратной — трёхкратная, из неё — четырёхкратная, и далее прочие многократные. К примеру, возьмём наименьшую пропорцию равенства из трёх равных членов, то есть из трёх единиц. Составим три новых члена по указанному правилу: первый — из первого, второй — из первого и второго, третий — из первого, двух вторых и третьего. Получилась пропорция 1 2 4 в двукратном отношении. Вновь составим из них другие члены по тому же правилу: первый — из первого, второй — из первого и второго, третий — из первого, двух вторых и третьего. Получилась пропорция 1 3 9 в трёхкратном отношении. Из неё подобным образом составляется пропорция 1 4 16 в четырёхкратном отношении, из неё — 1 5 25 в пятикратном отношении, и так до бесконечности, последовательно получая все наличные многократные.

Из обращённых многократных подобным образом составляются сверхчастные отношения и состоящие из них пропорции: из двукратной — полуторная, из трёхкратной — сверхтретья, из четырёхкратной — сверхчетвертная, и всегда в таком порядке. К примеру, возьмём трёхчленную пропорцию в двукратном отношении, и её наибольший член поставим на первое место. Образуем из неё три новых члена по тому же правилу: из пропорции 4 2 1 получается пропорция 4 6 9 в полуторном отношении. Снова возьмём трёхчленную пропорцию в трёхкратном отношении 9 3 1: из неё по тому же правилу составляется сверхтретья трёхчленная пропорция 9 12 16. Из четырёхкратной составляется сверхчетвертная пропорция 16 20 25, и так последовательно все имеющиеся одноимённые.

Из сверхчастных получаются сверхмногочастные и многократные-и-сверхчастные, и опять из сверхчастных — другие сверхчастные и многократные-и-сверхмногочастные. Большинство из них мы опустим за ненадобностью, некоторые же рассмотрим. Из полуторной пропорции с большим членом в начале по тому же правилу составляется пропорция в дваждысверхтретьем сверхмногочастном отношении: так из 9 6 4 по тому же методу составляется 9 15 25. А если в начале стоит меньший член, из неё получается многократно-и-сверхчастная пропорция, а именно двукратная-и-половинная: так из 4 6 9 по тому же методу получается 4 10 25. Из сверхтретьей с большим членом в начале получается сверхмногочастная триждысверхчетвертная пропорция; так из 16 12 9 получается 16 28 49. А если в начале стоит меньший член, из неё получается многократно-и-сверхчастная пропорция, а именно двукратная-и-сверхтретья: 9 21 49. Из сверхчетвертной с большим членом в начале получается сверхмногочастная пропорция, а именно четыреждысверхпятерная; так из 25 20 16 получается 25 45 81. А если в начале стоит меньший член, из неё получается многократно-и-сверхчастная пропорция, а именно двукратная-и-сверхчетвертная, так из 16 20 25 получается 16 36 81. Такой порядок продолжается до бесконечности, так что из одних получаются другие по тому же принципу, что далее рассматривать уже не нужно.

И как все пропорции и все отношения составляются из первого отношения равенства, так же все они в него разрешаются. Во всякой данной пропорции с тремя неравными членами мы вычтем из среднего члена меньший, а из большего — меньший и удвоенный средний без меньшего. Полученная пропорция будет той самой, из которой родилась данная. Если повторять это вычитание, в итоге оно разрешится в пропорцию равенства, из которой всё и было составлено, и которая уже ни на что не разлагается, только на отношение равенства.

Эратосфен доказывает, что все фигуры также составляются по некоей пропорции, и это составление также начинается с равенства и разрешается в равенство. Но об этом сейчас говорить нет нужды.

5. Диаграмма для трёхчленных сопряжений

Описанный Никомахом и Теоном алгоритм преобразует трёхчленную геометрическую прогрессию в две новые прогрессии по следующему правилу: «*Положи первый член равным первому, второй равным сумме первого и второго, а третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего*». При этом одна прогрессия получается из исходной напрямую, а другая — с обратной перестановкой членов.

Дадим обоснование этого правила. Всякая несократимая трёхчленная геометрическая прогрессия имеет вид $a^2 : ab : b^2$, где НОД $(a, b) = 1$ (Евклид, *Начала*, VIII 2). Действие алгоритма изобразим на схеме в виде процедуры с одним входом и двумя выходами (рис. 1). На левом выходе исходная прогрессия преобразуется в трёхчленное сопряжение $a^2 : (a^2 + ab) : (a^2 + 2ab + b^2)$, что после группировки членов даёт $a^2 : a(a + b) : (a + b)^2$; нетрудно видеть, что это новое сопряжение тоже является геометрической прогрессией. На правом выходе по аналогичному правилу составляется трёхчленная геометрическая прогрессия $(a + b)^2 : b(a + b) : b^2$.

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{a^2 : ab : b^2} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{a^2 : a(a+b) : (a+b)^2} & & \boxed{(a+b)^2 : b(a+b) : b^2}
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

Подадим на вход алгоритма Никомаха корневую прогрессию равенства из трёх единиц и рассмотрим двоичное дерево результатов, несколько уровней которого изображено на рис. 2.

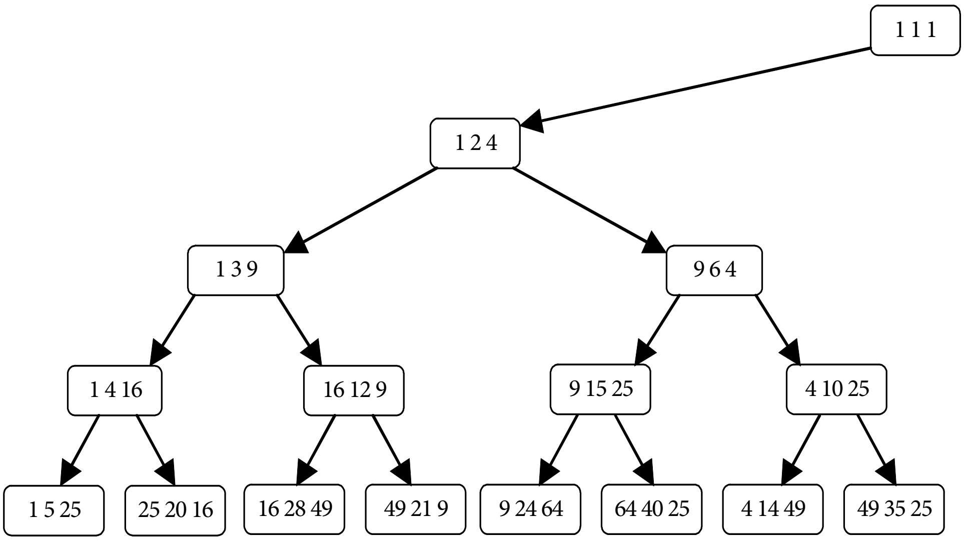

Рис. 2

6. Реконструкция «примитивной» формы алгоритма Никомаха

Теперь мы опишем алгоритм Никомаха в предельно очищенном виде, не загромождённом дополнительными деталями, а также сформулируем относящуюся к нему фундаментальную теорему и докажем её. Сам Никомах рассматривает числовые тройки; мы же упростим ситуацию и будем рассматривать числовые пары, задающие отношение соседних членов в трёхчленных геометрических прогрессиях.

В такой интерпретации алгоритм Никомаха превращается в вычислительную процедуру с одним входом и двумя выходами, преобразующую упорядоченную пару натуральных чисел в две другие упорядоченные пары по следующему правилу: «*на левом выходе левое число равно левому числу на входе, а правое число равно сумме чисел на входе; на правом выходе левое число равно сумме чисел на входе, а правое число равно правому числу на входе*» (рис. 3).

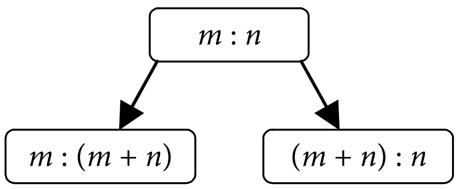

Рис. 3

Подадим на вход алгоритма Никомаха корневую пару из двух единиц и рассмотрим двоичное дерево результатов (рис. 4).

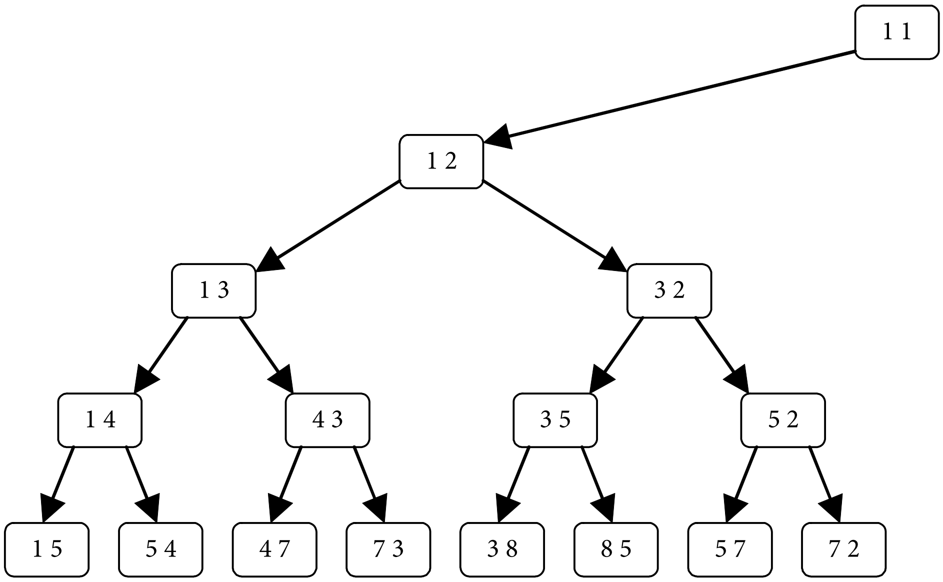

Рис. 4

Для геометрического представления алгоритма удобна схема «наращивания квадратов». Представим корневое отношение 1 : 1 единичным квадратом. Далее на каждом шаге алгоритма будем к уже имеющемуся прямоугольнику приставлять квадрат по каждому из обоих его измерений. Порождаемые при этом числовые отношения суть отношения сторон новых прямоугольников (рис. 5).

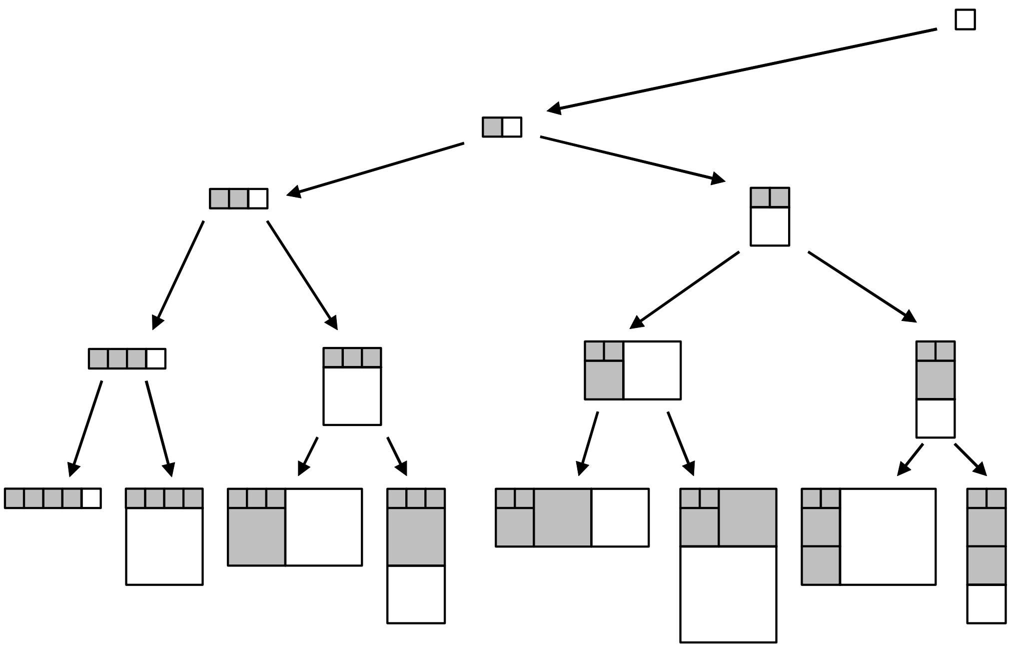

Рис. 5

7. Фундаментальная теорема

Теорема. Диаграмма Никомаха устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех узлов дихотомического дерева и множеством всех упорядоченных пар взаимно простых чисел.

Лемма. Каждому шагу диаграммы Никомаха вверх по направлению к корню соответствует одно элементарное вычитание меньшего числа из большего в алгоритме Евклида для поиска наибольшей общей меры двух чисел.

Доказательство теоремы. Сначала покажем, что всякие два числа, стоящие в произвольном узле диаграммы Никомаха, являются взаимно простыми. В самом деле, применяя к этим числам алгоритм Евклида, мы будем последовательно подниматься вверх по диаграмме вплоть до корневого узла, в котором находится отношение 1 : 1. Получается, что наибольшей общей мерой чисел рассматриваемого узла является единица, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что всякая упорядоченная пара взаимно простых чисел стоит в одном и только в одном узле диаграммы Никомаха. Действительно, для каждой упорядоченной числовой пары алгоритм Евклида даёт последовательность взаимных вычитаний, которую можно описать на языке перемещений по диаграмме Никомаха от рассматриваемого узла вверх, к корню. Эта цепочка шагов вправо и влево, обращённая назад от корня, однозначно определяет местоположение данной числовой пары на диаграмме, что и требовалось доказать.

8. Геометрическое представление алгоритма Никомаха для трёхчленных сопряжений

Чтобы понять, почему Никомах и Теон рассматривают трёхчленные сопряжения, а не более простые в обращении двучленные числовые отношения, вспомним о пифагорейской геометрической интерпретации трёхчленной геометрической прогрессии, известной по *Тимею* Платона:

> Два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы посредине родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и то, что связано, и эту задачу наилучшим образом выполняет пропорция (31b8–c4).

Процедуру построения новых трёхчленных сопряжений мы изобразим графически (рис. 6), пользуясь приёмами «геометрической алгебры», изложенными во II книге *Начал* Евклида.

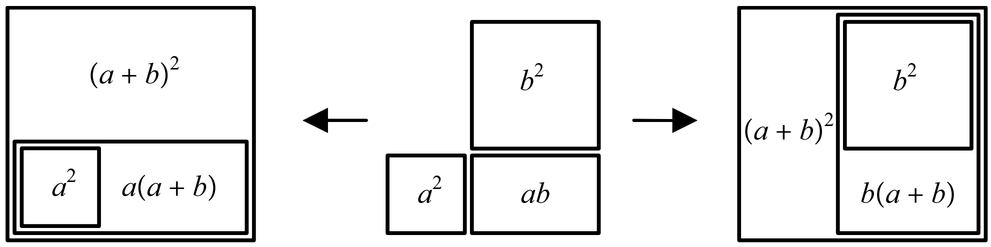

Рис. 6

Представим исходное трёхчленное сопряжение в виде двух квадратов a^2 и b^2, построенных на сторонах «сопрягающего» прямоугольника ab. В новых сопряжениях меньший член остаётся тем же квадратом a^2 или b^2, а в качестве большего члена берётся квадрат $(a + b)^2$; при этом «сопрягающим» членом оказывается в первом случае прямоугольник $a(a + b)$, во втором случае прямоугольник $b(a + b)$.

Такие трёхчленные сопряжения могут быть помещены на схему «наращивания квадратов» (рис. 7). Здесь каждый отдельный чертёж с рис. 5 достроен до квадрата, и теперь три члена сопряжения суть (a) только что прибавленный малый квадрат, (b) возникший при этом прибавлении прямоугольник, (c) большой квадрат. И если на рис. 5 двучленное отношение задавалось числами единичных отрезков, укладывавшихся по длине и ширине получавшихся прямоугольников, то теперь трёхчленное сопряжение задаётся числами единичных квадратов, укладывающихся в соответствующие квадраты и прямоугольники.

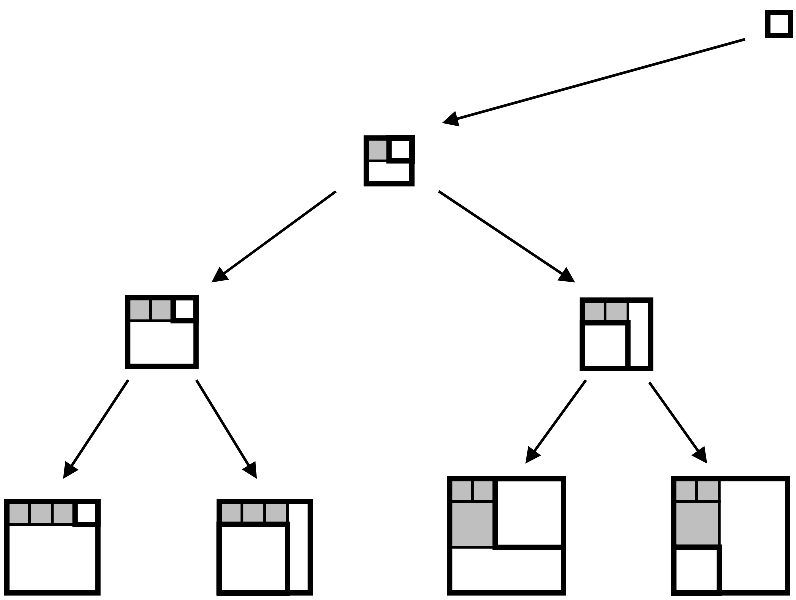

Рис. 7

9. «Десять средних» античной математики

В интересах дальнейшего изложения отступим на время от основной темы и коснёмся сведений о так называемых «десяти средних», передаваемых рядом античных авторов.

Понятие о среднем — одно из ключевых в пифагорейской математике. Оно возникает в разных науках — в музыке, в геометрии, в арифметике. Определения трёх средних даёт пифагореец Архит Тарентский (начало IV в. до н. э.) в трактате *О музыке*:

> В музыке имеется три средних: первое — арифметическое, второе — геометрическое, третье — обращённое, называемое также гармоническим. Арифметическое — когда три члена превосходят друг друга по такому правилу: насколько первый больше второго, настолько второй больше третьего. В этой пропорции оказывается, что интервал между большими членами меньше, а между меньшими — больше. Геометрическое — когда первый относится ко второму так же, как второй к третьему. Причём получается, что интервал между большими равен интервалу между меньшими. Обращённое, называемое гармоническим, — когда первый член больше второго на такую часть самого себя, на какую часть третьего члена средний больше третьего. В этой пропорции интервал между большими членами больше, а между меньшими — меньше (DK 47 B2).

Никомах во *Введении в арифметику* (II 22.1, 28.6) сообщает, что к трём средним, о которых учили «древние», последователями Аристотеля и Платона позднее были добавлены ещё три, а «новыми авторами» — ещё четыре. Представляется правдоподобным, что эти «новые авторы» — отнюдь не современники Никомаха, а люди, жившие за несколько веков до него; «новыми» же их мог называть тот источник, которым Никомах пользовался.

О четырёх «новых» средних, добавленных к уже шести имевшимся, пишет также Папп в *Математическом собрании* (III 18). Однако списки «новых» средних у Паппа и у Никомаха не совпадают. А именно, у каждого из них есть одно такое среднее, которого нет у другого. Причина этого несоответствия легко объяснима — в той логике построений, которой пользовались и Папп, и Никомах, «новых» средних должно быть пять, а не четыре (см. Heath 1921). Возможно, что оба автора отставили одно из этих средних в сторону из-за того, что десятке в пифагорейском мировоззрении отводилась особая роль самого совершенного числа; и потому средних бралось в общей совокупности десять, а не одиннадцать.

Построение всех средних описывается вполне единообразно. Пусть имеются три величины $a > b > c > 0$ и три разности между ними: $a - b$, $b - c$, $a - c$. В случае среднего арифметического верхняя и нижняя разности равны между собой: $a - b = b - c$. При построении прочих средних составляется пропорция из четырёх членов, в которой отношение двух величин приравнивается к отношению двух разностей. При этом в паре разностей $a - b$ и $b - c$ большей может быть как верхняя, так и нижняя разность. Так возникает таблица из 12 клеток. Однако две пропорции первого столбца дают одно и то же геометрическое среднее. Ещё одна пропорция является вырожденной, поскольку она сводится к уравнению $ac = bc$, и тем самым $a = b$ или $c = 0$. Так что в действительности по этой схеме составляются не двенадцать, а десять средних, в дополнение к среднему арифметическому.

$\frac{a}{b}=\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{c}$ Геометрическое	$\frac{a}{b}=\frac{b-c}{a-b}$ Шестое среднее	$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{a-b}$ Восьмое (П)	$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-c}$ Здесь $a = b$ или $c = 0$
	$\frac{b}{c}=\frac{b-c}{a-b}$ Пятое среднее	$\frac{b}{c}=\frac{a-c}{a-b}$ Десятое (Н), седьмое (П)	$\frac{b}{c}=\frac{a-c}{b-c}$ Девятое (Н), десятое (П)
$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ Гармоническое	$\frac{a}{c}=\frac{b-c}{a-b}$ Четвёртое среднее	$\frac{a}{c}=\frac{a-c}{a-b}$ Восьмое (Н), девятое (П)	$\frac{a}{c}=\frac{a-c}{b-c}$ Седьмое (Н)

Таблица 1

Средние в этой таблице названы так, как их называли Никомах и Папп. То среднее, которое Никомах называет десятым, а Папп — седьмым, можно назвать «полувырожденным», поскольку определяющее его уравнение сводится к виду $a = b + c$. (Если бы мне нужно было составить список из десяти средних, включая среднее арифметическое, я бы не стал включать в этот список именно это среднее.)

10. Связь алгоритма Никомаха с учением о «десяти средних»

Большой интерес для нашей темы представляет отсылка к Эратосфену, которая идёт у Теона Смирнского сразу после описания «алгоритма Никомаха» ($111_{10\text{–}13}$):

> Эратосфен доказывает, что все фигуры также составляются по некоей пропорции, и это составление также начинается с равенства и разрешается в равенство. Но об этом сейчас нет нужды говорить.

Папп в *Математическом собрании* (III 18) излагает эту же мысль так:

> Пропорция составляется из отношений. Началом же всех отношений является равенство. Геометрическое среднее сперва устанавливает из равенства самое себя, а потом — другие средние.

Как геометрическое среднее «устанавливает из равенства самое себя», мы уже знаем. Можно считать, как мы это делали выше, что сначала из отношения равенства 1 : 1 разворачиваются все прочие рациональные отношения, а затем на каждое отношение «навешивается» соответствующее ему геометрическое среднее. Но можно считать, что трёхчленные геометрические пропорции разворачиваются из пропорции равенства 1 : 1 : 1 по своему собственному корневому двоичному дереву.

Следующий шаг в развитии этого воззрения состоит в том, чтобы «навесить» на каждое рациональное отношение, как на общую основу, не только геометрическое среднее, но и прочие девять средних из табл. 1, положив отношения разностей и членов в пропорции, определяющей каждое среднее, равными базовому отношению соответствующего узла. При этом для существования шестого среднего с положительными членами должно выполняться дополнительное условие $\frac{a}{b} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, для восьмого среднего (по Паппу) — условие $\frac{a}{b} < \frac{2}{1}$.

Теперь мы можем построить соответствующие двоичные деревья для каждого из десяти средних нашей таблицы. В качестве примера построим двоичное дерево, по которому разворачиваются гармонические средние (рис. 8). Здесь отношение $m : n$ порождает гармонически сопряжённую тройку чисел $m(m+n) : 2mn : n(m+n)$. Можно сказать и так, что новая тройка $a' : b' : c'$ строится на левой ветви из старой тройки $a : b : c$ по формулам $a' = 2a - b/2$, $b' = 2a$, $c' = c + 2a$, а на правой ветви та же процедура приложена к тройке с обращёнными членами.

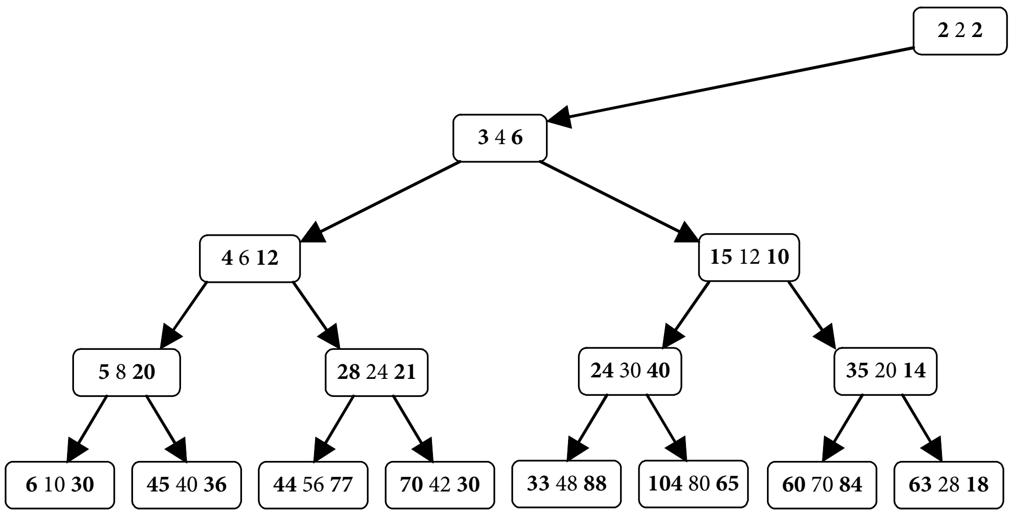

Рис. 8

Деревья для других «фигур» мы рисовать не будем, ограничившись тем, что выпишем формулы, по которым члены этих фигур выражаются через члены базового отношения $m : n$ (табл. 2).

m^2 mn n^2	mn n^2 $-m^2 + mn + n^2$	mn n^2 $-m^2 + 2mn$	
	$m^2 + mn - n^2$ m^2 mn	$m + n$ m n	$m^2 - mn + n^2$ mn n^2
$m(m + n)$ $2mn$ $n(m + n)$	$m(m + n)$ $m^2 + n^2$ $n(m + n)$	m^2 $m^2 - mn + n^2$ mn	m^2 $2mn - n^2$ mn

Таблица 2

Выше уже приводилась цитата из Паппа, согласно которой «геометрическое среднее сперва устанавливает из равенства самое себя, а потом — другие средние». Папп (III 19–23) подробно описывает процедуру, по которой может происходить это установление. Сначала он рассказывает о том, как геометрические средние разворачиваются из отношения равенства посредством уже знакомого нам алгоритма.

> Пусть Α Β Γ — три члена пропорции, и пусть Α + 2Β + Γ = Δ, Β + Γ = Ε, Γ = Ζ. Я утверждаю, что Δ Ε Ζ тоже будут тремя членами пропорции. Ведь Α к Β как Β к Γ; тем самым Α + Β к Β, как Β + Γ к Γ. И все первые члены ко всем вторым будут в том же самом отношении, так что Α + 2Β + Γ к Β + Γ, как Β + Γ к Γ. Но Α + 2Β + Γ = Δ, Β + Γ = Ε, и Γ = Ζ. И тогда Δ Ε Ζ есть пропорция (в отношении Α + Β к Β).
>
> И вот равные члены Α Β Γ производят Δ Ε Ζ в двукратной пропорции: ведь Α + 2Β + Γ двукратно по отношению к Β + Γ, и Β + Γ двукратно по отношению к Γ. И если Α Β Γ будут в двукратной пропорции, причём среди них Α — наибольшее, то Δ Ε Ζ будут в трёхкратной пропорции; а если Α — наименьшее, то в полуторной. Ведь Α + Β трёхкратно по отношению к Β, когда Α двукратно по отношению к Β; и полуторно, когда Α — половина Β. Так в последовательных отношениях отыскиваются следующие многократные и сверхчастные. И если Α Β Γ будут единицами, то геометрическое среднее Δ Ε Ζ в наименьших числах будет 4 2 1.

Нечто новое по сравнению с уже рассмотренными описаниями Никомаха и Теона представляет собой идея получать из среднего геометрического все прочие средние с помощью линейных подстановок. Папп приводит доказательства для всех средних, аналогичные тому, которое дано в только что цитированном отрывке для геометрического среднего; мы эти доказательства опустим. Пусть Α Β Γ — три члена геометрической пропорции. Составим из них три новых члена Δ Ε Ζ по следующим правилам:

• подстановка $\Delta = A + 3B + \Gamma$, $E = 2B + \Gamma$, $Z = B + \Gamma$ даёт **гармоническое среднее**; и если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 6 3 2.

• подстановка $\Delta = 2A + 3B + \Gamma$, $E = 2A + 2B + \Gamma$, $Z = B + \Gamma$ даёт **четвёртое среднее**; и если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 6 5 2.

• подстановка $\Delta = A + 3B + \Gamma$, $E = A + 2B + \Gamma$, $Z = B + \Gamma$ даёт **пятое среднее**; и если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 5 4 2.

• подстановка $\Delta = A + 3B + 2\Gamma$, $E = A + 2B + \Gamma$, $Z = A + B - \Gamma$ даёт **шестое среднее**; и если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 5 4 1.

• подстановка $\Delta = 2A + 3B + \Gamma$, $E = A + 2B + \Gamma$, $Z = 2B + \Gamma$ даёт **восьмое среднее**; и если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 6 4 3.

• подстановка $\Delta = A + 2B + \Gamma$, $E = A + B + \Gamma$, $Z = B + \Gamma$ даёт **девятое среднее**; и если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 4 3 2.

• подстановка $\Delta = A + B + \Gamma$, $E = B + \Gamma$, $Z = \Gamma$ даёт **десятое среднее**; и если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 3 2 1.

Седьмого среднего в этом списке нет по причине его «полувырожденности». Заинтересованный читатель может добавить к этому набору построение для отсутствующего у Паппа «седьмого среднего по Никомаху».

Указанные Паппом линейные подстановки для порождения всех прочих средних из среднего геометрического конечно же не являются единственными. Кроме того, они не слишком привлекательны в том плане, что хотя каждая числовая тройка для среднего геометрического отображается ими в некоторую числовую тройку для другого среднего, однако не все числовые тройки для других средних имеют своими прообразами соответствующие числовые тройки для среднего геометрического. К примеру, в процессе порождения гармонических средних тройка **6** : 4 : **3** с отношением крайних членов 2 : 1 остаётся непорождённой, и т. п. А ведь можно было найти линейные подстановки, ведущие от среднего геометрического, основанного на отношении $m : n$, к иному среднему, основанному на отношении $(m + n) : n$. Впрочем, мы удовлетворимся сказанным и перейдём к более значимому для нас вопросу.

11. Алгоритм Никомаха как возможная математическая основа неписаного учения Платона

Согласно предположению, выдвинутому в начале 1960-х годов представителями тюбингенской историко-философской школы Г.-И. Кремером (Krämer 1959) и К. Гайзером (Gaiser 1963), пифагорейская система двух бытийных начал — единицы как начала тождества и формы и неопределённой двоицы как принципа инаковости и материи — была положена Платоном в основу его неписаного учения, изустно передававшегося в Академии. (См. также Findley 1974.)

Большая часть античных упоминаний о «неписаных учениях» Платона так или иначе связана с лекцией Платона *О благе*. Аристоксен во второй книге *Гармоники* пишет:

> Вот что, по словам Аристотеля, испытали многие, слышавшие лекцию Платона *О благе*: все они пришли узнать о том, что у людей называется благом, — о богатстве, здоровье, силе, вообще о каком-нибудь необычайном счастье. Но это оказались речи о математических науках и числах, о геометрии и астрономии, и наконец о том, что благо есть единое. И речи эти показались им парадоксальными, поэтому одни отнеслись к этому с пренебрежением, другие поносили его (39_8–40_4).

Симпликий в *Комментарии к Физике Аристотеля* пишет следующее:

> Александр [Афродизийский] сообщает, что, согласно Платону, начала всего и самих идей — это единое и неопределённая двойка, которую он называл большим и малым, как об этом упоминает Аристотель в сочинении *О благе*. А тот получил кое-что от Спевсиппа, Ксенократа и от других, присутствовавших на лекции Платона *О благе*; и все они записали и сохранили его мнение, и сообщили, что он пользовался такими началами. И то, что Платон назвал единое и неопределённую двойку началом всего, весьма правдоподобно (ведь это учение пифагорейцев, а Платон во многом следовал за пифагорейцами), и он сделал неопредёлённую двойку также началом идей, называя её большим и малым, чтобы обозначить так материю ($151_{6–15}$).

В другом месте Симпликий ещё раз возвращается к этой теме:

> Платон называл единое и так называемую неопределённую двойку первыми началами чувственных вещей. Он также утверждал, что неопределённая двойка является умопостигаемой, назвав её беспредельным; и он положил началами большое и малое, также назвав их беспредельным в своей лекции *О благе*, как об этом сообщают Аристотель, Гераклид и Гестий и другие друзья Платона, присутствовавшие там и записавшие эти загадочные речи ($453_{25–29}$).

Александр Афродизийский в *Комментарии к Метафизике Аристотеля* также ссылается на книгу Аристотеля *О благе*:

> Он сказал, что начала чисел суть единица и двойка. И поскольку среди чисел есть единица и идущие за ней, а эти последние бывают многим и немногим, и первое за единицей содержится в них, он установил её началом многого и немногого. Но за единицей первой идёт двойка, и в ней заключено как многое, так и немногое: ведь двойное — это многое, а половинное — немногое, и они оба содержатся в двойке. А она противоположна единице, поскольку является делимой, а единица неделима. И он пытался показать, что равенство и неравенство являются началами всего сущего и противоположного ему (он ведь доискивался, как свести всё к самому простому). Равенство он связал с единицей, а неравенство с избытком и недостатком: ведь неравенство бывает двояким, в большом и в малом, в превосходящем и в недостающем ($56_{7–17}$).

В свете вышеизложенного мы можем увидеть в алгоритме Никомаха математическую иллюстрацию к неписаному учению Платона, воплощающую тезис о двух началах всего сущего — единице и неопределённой двойке, которая есть большое и малое. В самом деле, здесь весь «космос» рациональных отношений иерархически разворачивается из первоначального отношения равенства в рамках единообразной процедуры дихотомического ветвления. Этому ветвлению нигде не положен предел, поэтому раздвоение путей в каждом узле является в прямом смысле слова неопределённым. Далее, нисходящие пути, идущие в обе стороны от каждого узла, уходят один в сторону большего, а другой в сторону меньшего отношения, к «превосходящему и недостающему». Опять же, сверхчастные и другие отношения, получаемые на нисходящих путях, могут сколь угодно близко подойти к отношению равенства, никогда не сравниваясь с ним; неопределённость большего и меньшего проявляется также и в этом.

Ещё раз прочитаем текст, которым Никомах предваряет описание алгоритма:

> И этот стройный и необходимый путь к познанию природы целого ясным и недвусмысленным образом показывает нам, что прекрасное, определённое и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределённым, неограниченным и безобразным; и далее, что части и виды неограниченного и неопределённого приобретают благодаря первому свою форму и границы, и находят подобающий им порядок и расположение, и делаются доступными измерению, и приобретают некоторое подобие и одноимённость. Ведь понятно, что разумная часть души приводит в порядок неразумную часть, её порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит её к равенству и тождеству. А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые этические добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества (I 23.4–5).

Сам этот пассаж можно рассматривать как своего рода квинтэссенцию платоновской философии. В нём можно усмотреть отсылки и к *Филебу* с его диалектикой предела, беспредельного и меры, и к мифу о разумной и двух неразумных частях души, который Платон устами Сократа рассказывает в *Федре*, и к многократно повторенному в *Государстве* утверждению о том, что познание математических наук влечёт душу от становления к бытию.

У нас есть даже некоторые основания предположить, что первоисточником этого пассажа мог служить текст платоновской лекции *О благе* в передаче Аристотеля. В самом деле, в последнем предложении этого отрывка речь идет непосредственно о благе и этических добродетелях. Надо думать, что «математическая» лекция Платона *О благе* также должна была заканчиваться некоторым схожим выводом, разве что развёрнутым более подробно.

12. «Платоник» Эратосфена как ещё одна возможная отсылка к лекции Платона «О благе»

Краткие извлечения из не дошедшего до наших дней сочинения Эратосфена Киренского *Платоник* сохранились у Теона Смирнского. В интересующем нас отрывке (82_{22}–83_{15}) сказано следующее:

> Эратосфен говорит, что природным началом пропорции является отношение, и *** первая причина всего небеспорядочно рождённого. Ведь пропорция исходит из отношения, а начало отношения — равенство. И это очевидно. Во всяком особом роде имеется некий элемент и начало, в который всё прочее разлагается, он же неразложим… Элемент для количества — единица, для размеров — точка, для отношения и пропорции — равенство. Ведь единица неделима по количеству, точка — по размерам, равенство — по множеству отношений.

По-видимому, к тому же сочинению Эратосфена отсылает и следующее свидетельство Прокла в *Комментарии к первой книге Начал Евклида* (43_{22}):

> И не следует считать связью математических наук пропорцию, как это делал Эратосфен.

Нечто весьма близкое к этим двум фрагментам пишет также Папп в *Математическом собрании* (III 18), возводя это воззрение к самому Платону:

> Пропорция составляется из отношений. Началом же всякого отношения является равенство. Геометрическое среднее сперва устанавливает из равенства самое себя, а потом — другие средние. Оно показывает, как говорит божественный Платон, что пропорция есть природная причина всех гармоний и всякого благоразумного и упорядоченного рождения. Ведь он говорит, что единственной связью всех математических наук, причиной рождения и связью всего порождённого служит божественная природа пропорции.

Б. Л. Ван дер Варден (1959, 318) замечает, что тех слов, которые Папп приписывает здесь Платону, в диалогах последнего не содержится. Поэтому он предполагает, что Папп цитирует не Платона, но Эратосфена. Однако можно допустить и то, что весь этот пассаж в конечном счёте восходит к Платону — только не к диалогам, а к лекции *О благе*, текст которой был доступен Эратосфену в передаче кого-то из учеников Платона.

К этой же теме нас отсылает пассаж, с которого Никомах начинает II книгу *Введения в арифметику*:

> Элементом называется и является то последнее, из чего всё слагается и на что всё разлагается… Мы показали, что равенство является элементом для соотнесённого количества; а для простого и абсолютного количества первоначальными элементами служат единица и двойка, из которых как из последних всё слагается и возрастает до бесконечности, и на которые мы всё разлагаем при уменьшении.

Примечателен тот факт, что в текст, посвящённый разворачиванию всех отношений из отношения равенства, включено также упоминание ещё одной концепции, согласно которой элементами для абсолютного количества служат единица и двойка. Эту концепцию Никомах нигде в своём сочинении не обсуждает; но мы знаем, что она также обсуждалась в лекции Платона *О благе*.

13. Модель Штенцеля для абсолютных количеств

Разные модели идеальных чисел Платона для «количества самого по себе» рассматривались в работах Stenzel 1924, 1929, Toeplitz 1929, Becker 1931, 1957 (см. также Паршин 2004 и Маргаритов 2005). Модель, предложенная Штенцелем, реализует схему, изображённую на рис. 9.

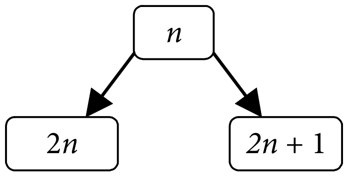

Рис. 9

Здесь для каждого числа n на левом пути строится чётное число $2n$, а на правом — нечётное число $2n + 1$. Начиная с корневой единицы, выстроим по этой схеме двоичное дерево (рис. 10). В узлах этого дерева расставлены по одному разу все натуральные числа, причём в каждой строке стоят по порядку все числа от 2^n до $2^{n+1} - 1$.

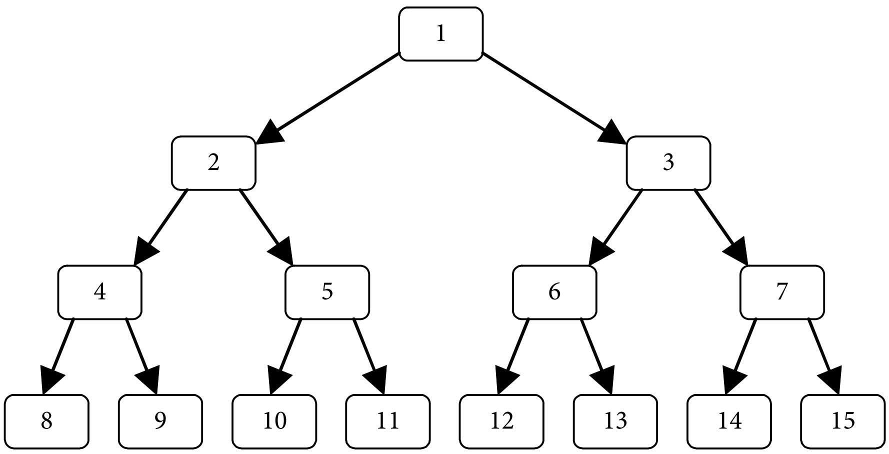

Рис. 10

Тем самым обе схемы порождения — для относительных и для абсолютных количеств — дополняют друг друга и доставляют материал для дальнейших исследований.

Список литературы

Беккер О. (2005) «Диайретическое порождение платоновых идеальных чисел», *Историко-математические исследования* 9 (44), 288–330

Ван дер Варден Б. Л. (1959) *Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции.* Пер. И. Н. Веселовского (Москва; репринт 2007)

Маргаритов В. С. (2005) «Оскар Беккер и “идеальные числа” Платона», *Историко-математические исследования* 9 (44), 282–287

Паршин А. Н. (2004) «Идеальные числа Платона (к вопросу об интерпретации)», *Владимир Соловьёв и культура серебряного века* (Москва)

Becker O. (1931) «Die diairetische Erzeugung der Platonischen Idealzahlen», *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, B 1, 464–501; русский перевод: Беккер 2005

Becker O. (1957) «Zum Problem der Platonischen Idealzahlen (eine Retraktation)», *Klassische philologische Studien* 17, 1–25

Findley J. N. (1974) *Plato. The Written and Unwritten Doctrines* (London)

Gaiser K. (1963) *Platons Ungeschriebene Lehre* (Stuttgart)

Heath T. L. (1921) *A History of Greek Mathematics.* 2 vols. (Oxford; repr. New York, 1981)

Hiller E. (1870) «Der Πλατωνικός des Eratosthenes», *Philologus* 30, 60–72

Krämer H. J. (1959) *Arete bei Platon und Aristoteles: Zum Wesen und zur Geschichte der platonischen Ontologie* (Heidelberg)

Muwafi A., Philippou A. N. (1981) «An Arabic version of Eratosthenes writing on mean proportionals», *Journal for the History of Arabic Sciences* 5, 147–174

Solmsen F. (1942) «Eratosthenes as Platonist and Poet», *Transactions and Proceedings of the American Philological Association* 73, 192–213

Stenzel J. (1924) *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles* (Leipzig-Berlin, repr. Darmstadt, 1959)

Stenzel J. (1929) «Zur Teorie des Logos bei Aristoteles», *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, B 1, 34–66

Toeplitz O. (1929) «Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon», *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, B 1, 3–33

Центр образовательных проектов ΣΙΓΜΑ,
Новосибирск, schetnikov@ngs.ru