ЛЕКЦИИ/ LECTURES

ЗНАЛИ ЛИ ДРЕВНИЕ ГРЕКИ НАТУРАЛЬНЫЙ ОБЕРТОНОВЫЙ РЯД?

Л. В. Александрова
Новосибирская государственная консерватория имени М.И. Глинки
alura4556@mail.ru

Lyudmila Aleksandrova
M.I. Glinka Novosibirsk State Conservatoire (Russia)

DID THE ANCIENT GREEKS KNOW THE NATURAL OVERTONE SERIES?

Abstract: Music theory, which developed in the course of a single musical-mathematical-astronomical synthesis, does not give a direct answer to the question posed – "did the ancient Greeks know the natural overtone series" as a reasonable system. Nevertheless, the musical theory in the preserved sources-original works, their fragments, compilations – came quite close to understanding of the existening of the phenomenon much later called "natural overtone series". The article attempts to find a correspondence between individual mathematically calculated intervals, the main system-forming generic tetrachordal structures (diaton, chroma, enharmony) and segments of the natural overtone series as evidence of the unity of the scientific and empirical (auditory) approach to achieving the best sound of Music, universal Harmony. The article is a revised and expanded version of the Lecture for students and teachers of conservatories "Musical acoustics in the works of ancient scientists" (Novosibirsk, 2009).

Key words: natural overtone series, tetrachord, ancient musical system, Pythagorean system, monochord, helikon, Pythagoras, Archytos, Eratosthenes, Aristoxenus, Ptolemy.

Об изначальном единстве мироздания древних греков остались многочисленные источники, сохранившиеся в меньшей степени в оригиналах, в значительной – во фрагментах, пересказах и компиляциях. Несмотря на содержащиеся в них противоречия, неясности, возможно, ошибки, они все же донесли до последующих эпох ценную информацию, позволяющую судить, в частности, о музыкально-математико-астрономическом синтезе. Однако обсуждения вопроса – имели ли древние представление о натуральном обертоновом звукоряде как о законченной и обоснованной системе – в ис-

DOI:10.25205/1995-4328-2022-16-1-370-406

точниках не содержится. Тем не менее, музыкальная теория, развивавшаяся в едином русле научных представлений и вобравшая в себя знания о математике, акустике, астрономии, философии, достаточно близко подошла к пониманию существования явления, названного значительно позже «натуральным обертоновым рядом». Предпримем попытку отыскать соответствие между отдельными интервальными структурами и основными системообразующими тетрахордальными образованиями древнегреческой музыки (диатон, хрома и энгармония) и фрагментами натурального обертонового ряда как свидетельства единства научного и эмпирического (слухового) подхода к достижению наилучшего звучания Музыки, символизирующей вселенскую Гармонию.

Рассмотрим некоторые свидетельства античных ученых по затронутому вопросу.

Главный постулат пифагореизма – «все есть число» – Аристотель комментирует так: «…они видели, что свойства и соотношения отношения, присущие гармонии, выразимы в числах… что элементы чисел суть элементами всего существующего и что все небо есть гармония и число» («Метафизика» 1934, I, 5. 985b–986a, пер. А. В. Кубицкого). Из этого обобщающего высказывания, применимого к единству математики и музыки, очевидно, что «…божество наставляет нас… учит числу и счету)» (Платон, «Послезаконие» 988b, пер. А. Н. Егунова)[1]. [Примечания см. в конце статьи]. В трудах авторов первой половины II в. н. э. Никомаха Герасского (Nicomachi Geraseni Enchiridion 1895, 6, 8, 10; «Руководство по гармонике, продиктованное на скорую руку, сообразно старине» 2009, 6, 8, 10, пер. Т. Г. Мякина и Л. В. Александровой), а также Теона Смирнского («Что в математике полезно для чтения Платона», раздел о Музыке), руководствуясь античной традицией, в понятие музыкальной гармонии включается учение об отношениях и пропорциях (Таннери 1902, 308).

Как повествуют исторические источники, во времена Пифагора для определения музыкальных интервалов и настройки музыкальных инструментов существовал простейший инструмент – *монохорд* (изобретение которого, собственно, и приписывается Пифагору Диогеном Лаэртским: «Он же открыл и разметку монохорда» (Диоген Лаэртский 1995, VIII, 12, 339, пер. М. Л. Гаспарова), представлявший собой резонаторный ящик с натянутой над ним струной, над которой прикреплялась передвижная подставочка («кобылка»). Первоначальный процесс «разработки» конструкции монохорда Пифагором описывает Гауденций: «Он натянул струну на линейку и разделил ее на 12 частей. После этого он заставил звучать сначала всю струну, а затем ее половину, то есть 6 частей, и нашел, что вся струна была в консонансе со своей половиной, причем музыкальный интервал представлял октаву. После того же, как он заставил сначала звучать всю струну, а затем ¾ ее, он услышал консонанс кварты, и аналогично – для квинты» (Gaudenti philosophi 1895, 11, 341; Ван дер Варден 1959, 403).

К III в. до н. э. относится изобретение более сложного устройства под названием *канон*, который представлял собой вариант старого монохорда, усовершенствованный «до ранга точного измерительного прибора» (Ван дер Варден 1959, 410). Его подробное описание, выполненное на прямой АВ, содержится у Евклида (Псевдо-Евклида) в трактате «Sectio canonis» («Деление канона») (Euclidis 1895, 163–165; пер. А. И. Щетникова 2012, 107–108) в двух последних (19 и 20) предложениях.

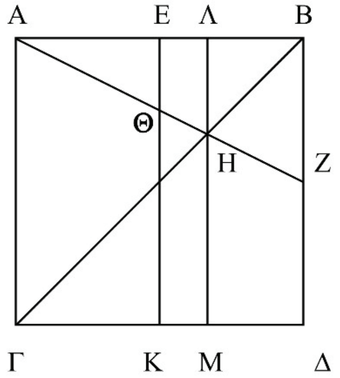
Предпоследнее предложение (19) «Деления канона» Евклида описывает способ числового определения интервалики относительно звуков античной совершенной системы: «Разделением линейки получается наилучшая неизменная система. Пусть линейка делит струну АВ по длине на четыре равные части в Г, Δ, Е. Тогда ВА издает наинизший голос. АВ будет эпитритным к ГВ, так что ГВ созвучно с АВ в кварту на повышение. Пусть АВ – это прослабаномен; тогда ГВ – это *диатон нижних*. Далее, АВ будет двукратным к ВΔ, и они созвучны в октаву, так что ВΔ – это *меса*. Далее, АВ будет четырехкратным к ЕВ, так что ЕВ – это *нэта высших*. ГВ делится пополам в Z. ГВ будет двукратным к ZB, и ГВ созвучна в октаву с ZB; тогда ZB – это *нэта соединенных*. Из ΔВ удаляется третья часть ΔН. ΔВ будет полуторным к НВ, и они созвучны в квинту; тогда НВ – это *нэта отделенных*. НВ продлевается на равное НΘ, и ΘВ созвучна в октаву с НВ; поэтому ΘВ будет *гипатой средних*. От ΘВ отнимается третья часть ΘК. ΘВ будет полуторным к КВ, поэтому КВ будет *парамесой*. КВ продлевается на равную ΛК, что дает *гипату нижних* ΛВ. Так с помощью линейки определяются все голоса неизменной системы». Как видно, в этом предложении показано разделение линейки-струны (*Рисунок I*), разметка которой предполагает определение *основных* звуков античной совершенной системы, имеющей в своем составе раздельные (отделенные) и соединенные тетрахорды, на которые в своем описании опирается Евклид (см. примечание 13).

Рисунок I

Позднее, во II в. н. э., почти через пятьсот лет после создания «Sectio canonis», чертеж более сложного устройства канона описал в своем трактате Клавдий Птолемей («Гармоники» II, 2. Düring 1930, 46–49).

Поскольку для античного скульптора, архитектора, поэта понятие канона в обобщенном смысле означало «совокупность правил», определяющих идеальные пропорции, то, возможно, потому Птолемей в значении измерительного прибора *для высоких музыкальных целей и задач* употребил название *геликон* (ἑλικών) – по названию горы в Западной Беотии, места пребывания муз – геликониад. Устройство геликона предполагает установление четырех одинаковых по длине струн на квадратном резонаторном ящике – *тетрагоне* (τετράγονων). Чертеж, который приводит Птолемей (там же: II, 2, 46) наглядно демонстрирует процесс вычисления интервалов на геликоне через геометрические построения.

Рисунок II



На рисунке буквами ΑΒΓΔ обозначен квадрат, каждая из сторон которого условно равна 12. Сторона ΒΔ делится пополам в точке Z (BZ = ZΔ = 6). Из вершины угла ΒΑΓ проводится прямая линия к точке Z. Далее проводится диагональ ΒΓ. Линии ΒΓ и AZ пересекаются в точке H. Через точку H проводится прямая ΛΜ, параллельная ΒΔ и ΑΓ, равная ΒΔ и ΑΓ. Далее через точки E и K проводится перпендикулярная прямая EK, параллельная ΒΔ, ΛΜ и ΑΓ, которая пересекается с AZ в точке Θ.

Итак, ΑΓ = 12, BZ, ZΔ = 6, ΕΛ, KM = 2

ΘK = 9, ΛΒ, ΛΗ = 4

HM = 8, ΕΘ = 3

Такого рода устройство измерительного музыкального прибора-инструмента геликона давало возможность наиболее удобного и точного определения основных музыкальных интервалов – октавы, квинты, кварты, отраженных в пропорции 12 : 9 : 8 : 6, нежели это было возможно на монохорде. По этим консонансам производилась настройка музыкальных инструментов, а также вычисления интервалики родов, ладов.

Интервалы октавы, квинты, кварты, первоначально найденные опытным путем и получившие, по преданию, применение еще при настройке лиры Орфея, обрели в каноне научное обоснование. Однако дальнейшее деление струны на части в целях получения других интервалов не производилось, поэтому формирование пифагорейского строя осуществлялось не опытным, а математическим путем.

Метод построения восходящих и нисходящих квинтовых шагов лежит в основе образования акустического строя, названного «пифагорейским». Пифагорейский строй является отражением уровня научной мысли, образовавшейся на гребне логистики, результатом абсолютизации измерительной деятельности. Он возник как попытка обобщения явлений практики научным путем, был своеобразным научным багажом древних греков. Стремление подвергнуть строгой регуляции акустическое поле, звуковой континуум через космическую «сверхзадачу» числа было «научной программой» ученых-антиков.

Рассмотрим закономерности построения пифагорейского математического строя, в построении которого используется геометрическая пропорция. Разделение звукового пространства на конкретные числовые «отрезки» осуществляется путем набора квинтовых шагов ($^3/_2$) и перенесения соответственных звуков на октаву вниз (показатель $^1/_2$ для восходящего направления квинтовых ходов при перемещении в заданную октаву – условно *c* – c^1)[2]:

0 (*c*)	1 (*g*)	2 (*d*)	3 (*a*)	4 (*e*)
1	$^3/_2 \cdot 1$	$^3/_2 \cdot {}^3/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^9/_8$	$^9/_8 \cdot {}^3/_2 = {}^{27}/_{16}$	$^{27}/_{16} \cdot {}^3/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^{81}/_{64}$

5 (*h*)	6 (*fis*)	7 (*cis*)
$^{81}/_{64} \cdot {}^3/_2 = {}^{243}/_{128}$	$^{243}/_{128} \cdot {}^3/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^{729}/_{512}$	$^{729}/_{512} \cdot {}^3/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^{2187}/_{2048}$

8 (*gis*)	9 (*dis*)	10 (*ais*)
$^{2187}/_{2048} \cdot {}^3/_2 = {}^{6561}/_{4096}$	$^{6561}/_{4096} \cdot {}^3/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^{19683}/_{16384}$	$^{19683}/_{16384} \cdot {}^3/_2 = {}^{59049}/_{32768}$

11(*eis*)	12 (*his*)
$^{59049}/_{32768} \cdot {}^3/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^{177147}/_{131072}$	$^{177147}/_{131072} \cdot {}^3/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^{531441}/_{524288}$

С помощью нисходящих квинтовых шагов выявляются обратные величины и, соответственно, меняются квинтовый и октавный показатели на $\frac{2}{3}$ и 2, если они не входят в пределы октавы $c^1 - c$:

0 (*c*) 1 (*f*) 2 (*b*) 3 (*es*) 4 (*as*)
1 $\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{16}{9}$ $\frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$ $\frac{32}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{128}{81}$

5 (*des*) 6 (*ges*) 7 (*ces*)
$\frac{128}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{243}$ $\frac{256}{243} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1024}{729}$ $\frac{1024}{729} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4096}{2187}$

8 (*fes*) 9 (*bes*) 10 (*eses*)
$\frac{4096}{2187} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8192}{6561}$ $\frac{8192}{6561} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{32768}{19683}$ $\frac{32768}{19683} \cdot \frac{2}{3} = \frac{65536}{59049}$

11 (*ases*) 12 (*deses*)
$\frac{65536}{59049} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{262144}{177147}$ $\frac{262144}{177147} \cdot \frac{2}{3} = \frac{524288}{531441}$

Итак, построение квинтовых шагов *вверх* образует ряд важных интервалов, необходимых для образования тетрахордальных структур родов: $^{9}/_{8}$ – целый тон (эпогдоон), $^{81}/_{64}$ – дитон. Построение квинтовых шагов *вниз* определяет, помимо кварты $\frac{4}{3}$, малую терцию – $^{32}/_{27}$.

Более того, пифагорейский строй, образованный восходящими квинтами дает характерные величины – *апотому* $^{2187}/_{2048}$, интервал, составляющий большую часть полутона, и $^{531441}/_{524288} \approx {}^{74}/_{73}$ – *комму* (κόμμα – биение, удар)[3].

Построение через нисходящие квинтовые шаги выявляет характерные величины – *леймму* $^{256}/_{243}$, интервал, составляющий меньшую часть полутона, и величину $^{524288}/_{531441}$, обратную комме. Апотома и леймма в сумме образуют целый тон

$^{2187}/_{2048} \cdot {}^{256}/_{243} = {}^{9}/_{8}$.

Комма в сумме с обратной величиной образует единицу, то есть, приму

$^{531441}/_{524288} \cdot {}^{524288}/_{531441} = 1$.

Разница между апотомой и лейммой равна комме

$^{2187}/_{2048} : {}^{256}/_{243} = {}^{531441}/_{524288}$.

Как видно, соотношение апотомы, леймы и коммы выявляет логически-акустическую взаимосвязь определенных высот. Так, *диатонический полутон* с разницей в пять квинтовых шагов всегда выявляет леймму:

$(-1) f : (+4)\ e = {}^{4}/_{3} : {}^{81}/_{64} = {}^{256}/_{243}$;

$(-2)\ b : (+3)\ a = {}^{16}/_{9} : {}^{27}/_{16} = {}^{256}/_{243}$ и так далее.

Хроматический полутон с разницей в семь квинтовых шагов всегда дает *апотому*:

(+5) *h* : (−2) *b* = $^{243}/_{128} : {}^{16}/_{9} = {}^{2187}/_{2048}$;
(+6) *fis* : (−1) *f* = $^{729}/_{512} : {}^{4}/_{3} = {}^{2187}/_{2048}$ и так далее.

Соотношение акустических величин с разницей в 12 квинтовых ходов дает комму:

(+8) *gis* : (−4) *as* = $^{6561}/_{4096} : {}^{128}/_{81} = {}^{531441}/_{524288}$;
(+4) *e*: (−8) *fes* = $^{81}/_{64} : {}^{8192}/_{6561} = {}^{531441}/_{524288}$ и так далее.

Комма, образующаяся на двенадцатой квинте, которую можно представить как несовпадение звуков *c* и *his* (при восходящих квинтах), *c* и *deses* (при нисходящих квинтах), и составляющая примерно 1/9 часть тона, есть *объективный иррациональный фактор*, закономерно возникающий при измерении акустического поля. Акустическое пространство априорно обладает качеством неопределенности, нечеткости, «размытости», объективно содержащемся в основе любого строя. Поэтому все попытки отразить его параметры через рациональные количественные характеристики неизбежно сталкиваются с той несоизмеримостью, которая столь глубоко занимала умы древних греков[4].

Расширение звукового пространства путем математического выявления новых акустических величин происходило неустанно. Как видно, ко времени Клавдия Птолемея была освоена довольно значительная математико-акустическая область, которая давала большое многообразие интервалов, лишь незначительно отличающееся качественными градациями, в той или иной мере воспринимаемыми слухом. Интервалы пифагорейского строя, выраженные иррациональными величинами, – явление, обнаруживаемое при теоретических подсчетах. Практика же подтверждает, что пифагорейский строй был неким идеальным эталоном, который достичь было весьма затруднительно, а, быть может, и невозможно, хотя это не отрицает устремленности к поиску «наилучшего звучания», характерному для всего периода античности. У Платона содержится высказывание: «...люди трудятся там бесплодно: они измеряют и сравнивают воспринимаемые на слух созвучия и звуки... одни говорят, что различают какой-то отзвук посреди, между двумя звуками, и что как раз тут находится наименьший промежуток, который надо взять за основу для измерений; другие спорят с ними, уверяя, что здесь нет разницы в звуках, но те и другие ценят уши выше ума» («Государство» 1994, VII, 531 *a-b*, 314–315, пер. А. Н. Егунова).

Стремление опытным путем передать различия в конкретных структурно-ладовых образованиях, безусловно, отражало определенные запоминаемые слуховые образы, хотя они (образы) могли и не соответствовать четким математическим величинам[5], полученным с помощью вычислений.

Структура древнегреческой звуковысотной организация – античная совершенная система – базировалась на тетрахордальных образованиях, именуемых *родом* (τὸ γένος) (об этом – Cleonidis 1895, I, 180; Неизвестного автора (Аноним) 1894, VII I, 9; Aristides Quintiliani 1963, I 9, 83; Gaudenti philosophi 1895, V, 331 и др. писатели). Внутреннее заполнение тетрахорда мобильно и определяется принадлежностью *к* роду – *диатону, хроме, энгармонии*. Древнейший из них – диатон – был основой возникновения ладов (дорийского, фригийского, лидийского и их гипо- и гиперформ), состоящих из двух тетрахордов. Хрома и энгармония – более поздние тетрахордальные образования. У Аристоксена в «Элементах гармоники» сказано: «Первым и древнейшим из них надо полагать диатонический: с ним в первую очередь сталкивается человеческая природа. Второй – хроматический. Третий же и самый молодой – энгармонический: восприятие приноравливается к нему в последнюю очередь и с затратой немалых усилий» (Аристоксен 1997, I 19, 27–28, пер. В. Г. Цыпина).

Показательны расцвет и утрата энгармонии, имеющие в своем составе условные четвертитоновые интервалы. Исследователи отмечают большую чуткость греческого и вообще восточного уха к тонким сменам акустических высот и объективную возможность их различения и воспроизведения[6]. Тем не менее, в границах античной музыкальной культуры, этической предустановленности, греческой нормы слухового восприятия энгармония не получила широкого распространения. Ван дер Варден на основании ряда исследований пишет, что до Архита энгармония не применялась, так как не удавалось разделить леймму $^{256}/_{243}$ на две равных части. Архит же, завершитель пифагорейской гармоники, подошел к построению энгармонии математическим путем и разделил леймму на $^{36}/_{35}$ – меньшую часть и $^{28}/_{27}$ – большую часть полутона (что в сумме составляет полутон $^{16}/_{15}$), в результате энгармония приобрела выражение как

$^{5}/_{4} \cdot {}^{36}/_{35} \cdot {}^{28}/_{27} = {}^{4}/_{3}$.

Невозможно сейчас установить нижнюю историческую границу возникновения энгармонического рода. Возможно, он был привнесен с Востока. Плутарх же пишет, что музыканты считают Олимпа изобретателем энгармонии, поскольку его трихорд *e–f–a* является основой для энгармонии, и только к Ш в. до н. э. энгармония приобрела вид «позднейшего энгармонизма» [Плутарх 1922, 42; примеч. 2, 43, пер. Н. Н. Томасова].

В период поздней античности (I–II вв. н. э.) энгармонию считали слишком ученой и воспринимаемой лишь образованными людьми, поскольку процесс теоретических расчетов и трудности выстраивания были недоступны практическим музыкантам: «Из всех родов диатонический – более естественный; он певуч для всех и даже для необученных. Хрома более искусна. Она поется только у получивших обучение. Более щепетилен энгармонический род: большинству он недоступен» (Пахимер, 422, Vinc.; цит. по: (А. Ф. Лосев 1960, 226)).

Чрезмерное внимание к акустической величине интервалов, слишком подробная количественная детализация близких, но разнокачественных интервалов, сложная вычислительная техника, оперирующая отношениями дробных многозначных чисел, дающих приближенное иррациональное выражение, сыграли решающую роль в возникновении новых явлений. Во-первых, это повлияло на переосмысление логико-понятийных моментов, связанных с формированием ладовой системы, во-вторых, направило эстетическое ощущение качественно иррационального в сторону чувственного восприятия, которое пифагорейцы игнорировали, что соответственно сказалось на определенном выборе в использовании конкретных акустических единиц измерения интервалики.

Более поздний период (конец IV в. до н. э.), связанный с именами «гармоника» Аристоксена и его последователями, не только приемлет иррациональное, эмпирически и чувственно обнаруживаемое начало, но и возводит соотношение рационального и иррационального в эстетическую категорию. Линия чувственного восприятия идет от аристотелевской эстетики художественного подражания, в частности, подражания музыки психическим процессам. Много пишет Аристотель также и о реальных физиологических ощущениях в процессе восприятия звука, цвета и т. д. В «Элементах гармоники» Аристоксена, ученика Аристотеля, видны тенденции, с одной стороны, объединения пифагорейских традиций с аристотелевским учением в области музыкальной теории. С другой стороны, во многих фрагментах Аристоксена явно проступает не только стремление к уравновешиванию этих двух начал, но и первичность чувственно воспринимаемых явлений: «...слухом мы различаем интервальные величины, а разумом созерцаем их функции. Нужно приучить себя тщательно различать то и другое. Ибо дело [у нас] обстоит не так, как в задачах по геометрии, где принято говорить: “Допустим, это прямая линия”. Относительно интервалов от таких утверждений надо отказаться. Геометр ведь не пользуется способностью восприятия и потому не приучает зрение различать, что хорошо, а что плохо в прямой, окружности и т. п.; скорее, этим занимается плотник, токарь или другой какой ремесленник. Для музыканта же точность восприятия – чуть ли не основное. Невозможно ведь плохо воспринимающему хорошо говорить о том, что никоим образом не воспринимается» (Аристоксен, «Элементы гармоники» II, 43, пер. В. Г. Цыпина).

Примерно началом III в. до н. э. можно обозначить появление противопоставляющих себя друг другу двух школ – пифагорейцев-«каноников» (к III в. до н. э. исследователи относят изобретение канона (Ван дер Варден 1959, 410); этот факт связывается с созданием трактата Псевдо-Евклида «Sectio canonis») и аристоксеновцев-«гармоников».

Птолемей уже с позиций своего времени следующим образом характеризует эти два направления: «…пифагорейцы, хотя и не обязательно все до единого, доверяют лишь акустическим данным и приноравливают к ним различные отношения звуков, которые часто не согласуются с фактическими данными и вследствие этого у них возникают необоснованные претензии к логическому критерию, как к чему-то неправильному. Ученики же Аристоксена, которые чаще всего получали образование у тех, кто в основном полагался на слуховое восприятие, тем не менее, смотрят на него как на нечто второстепенное и, главным образом, пользуются логическими отношениями, взятыми как сами по себе, так и при анализе данных опыта. Взятые сами по себе – это означает, что они не подгоняют различные числовые отношения, служащие для выражения отношений, но образуют из них интервалы» («Гармоники» I, 2. Düring 1930, 5, 7; цит. по: Шестаков 1975, 62).

Развитие чувственного начала, чувственного восприятия, слуховых ощущений, о чем пишет Аристоксен, порожденные практикой музицирования, способствовали формированию логики ладового мышления – закономерностей, лежащих в основе монодийного типа звуковысотной организации. Линия научного подхода, опирающегося на математические изыскания и доводы, философско-созерцательное осмысление природных явлений, включающее в свой круг и музыкально-теоретические проблемы, продолжала самостоятельно развиваться. В этом плане необходимо обратить внимание на ряд вопросов, занимавших умы древних греков.

Итак, главный вопрос, возникающий при знакомстве с древнегреческой теорией музыки – знакомы ли были древние греки с тем, что мы сейчас называем натуральным обертоновым рядом или хотя бы его подобием?

Известно, что акустика в период античности еще не выделилась в самостоятельную отрасль знания, соответственно, не существовало и такого специального термина (греч. ἀκοή – слух, весть; τὸ ἄκουσμα – все слушаемое: пение, музыка, речь и т. п.; к последнему понятию относятся «акусмы» Пифагора). Это явление изучалось в границах науки о природе, о чем свидетельствуют многочисленные трактаты под единым названием «О природе» (Анаксагор, Филолай, Парменид и другие), по большей части не дошедшие до более поздних времен. Из них известно об акустических опытах пифагорейцев. Так, наиболее ранний из них связан с именем Пифагора. Описание его акустического опыта дошло до нас через трактат Никомаха «Руководство по гармонике», который, вполне очевидно, пересказан на основе работ Аристоксена, опиравшегося, в свою очередь, на пифагорейца Филолая, а затем легенда о Пифагоре была неоднократно дословно повторена – в трудах Ямвлиха, Гауденция, Порфирия в Комментарии к «Гармоникам» Птолемея, Боэция[7].

Из этой легенды известно, что Пифагор был очень озабочен поиском возможности передачи звуковых отношений с помощью чисел посредством некоторого «органического вспомогательного инструмента для слуха, самого неколебимого и безошибочного» наподобие тех, которые, например, зрение «обретает в циркуле, лекале или диоптре, а осязание – в весах и уяснении размеров» (Nicomachi Geraseni 1895, 6, 245–246; «Пифагорейца Никомаха из Герасы», 2009, с. 183–184, пер. Т. Г. Мякина, Л. В. Александровой). Кстати, согласно Аристоксену, именно Пифагору приписывается введение мер и весов у эллинов, о чем сообщает Диоген Лаэртский (Диоген Лаэртский 1995, VШ 14, 340, пер. М. Л. Гаспарова). По божественному совпадению, прогуливаясь около кузницы, Пифагор услышал, что молотки стучат по наковальне, производя согласованные друг с другом звуки. Это послужило поводом для проведения известного опыта с подвешиванием грузов различной тяжести на струны одинаковой толщины и длины, а впоследствии и измерительного прибора – монохорда (о чем выше уже шла речь), с помощью которого были высчитаны интервалы тетраксиса, передающие основные отношения музыкальных интервалов.

Несмотря на то, что время научного эксперимента для антиков еще не наступило (Ван дер Варден 1959, 410), все же первые попытки в этом направлении в области акустики состоялись. Так, известен опыт пифагорейца Гиппаса с медными дисками. Аристоксен сообщает о том, что «Гиппас изготовил четыре медных диска с таким расчетом, чтобы диаметры их были равны, толщина первого диска составляла 1⅓ толщины второго, 1½ толщины третьего и была в два раза больше толщины четвертого. Когда по ним ударяли, то они издавали определенный консонирующий интервал... Как говорят, Главк, заметив звуки, издаваемые дисками, первый принялся играть на них как на музыкальном инструменте» (Werhli, fr. 90 (Schol. Plat. Phaedo 108d); цит. по: Лебедев 1989, 19).

В литературе многократно пересказывается опыт Ласа Гермионского с сосудами, о котором сообщает Теон Смирнский: «Лас Гермионский, с которым согласны последователи пифагорейца Гиппаса из Метапонта, полагая, что частоты колебаний, от которых [получаются] консонансы, соответствуют числам, получал такие отношения на сосудах. Взяв равные [по объему] сосуды и один из них оставив пустым, а другой <наполнив> водой наполовину, он извлекал звук из того и другого, и у него выходила октава. Затем он оставлял один сосуд пустым, а второй наполнял водой на одну четверть, и при ударе у него получалась кварта. Квинта [получалась], когда он заполнял [второй сосуд] на одну треть. Таким образом, отношение пустоты одного сосуда к пустоте другого составляла: в случае с октавой – 2 : 1, с квинтой – 3 : 2, с квартой – 4 : 3» (Hiller. 59, 4; цит. по: (Лебедев 1989, 154)). Также от Теона Смирнского узнаем, что Архит «признавал соответствие самых высоких звуков самым частым вибрациям и существование определенных численных отношений между быстротой колебаний для каждого музыкального аккорда (созвучия – Л. А.)» (Таннери 1902, 319).

Таким образом, «история пифагорейской теории музыки вполне соответствует естественному развитию любой науки о природе: она исходит из повседневного *опыта*, устанавливает *теорию* для объяснения опыта и, наконец, проверяет эти теории при помощи особых, приспособленных к этому *экспериментов*»[8] (Ван дер Варден Б. Л. 1959, 410).

Итак, по поводу знакомства древних с натуральным обертоновым рядом, состоящем из обертонов (призвуков, гармоник, частичных тонов) в античных научных источниках нет никаких прямых указаний[9].

Однако не случайно, что первые интонационные опоры лиры Гермеса и Орфея, тетрахордальность античной совершенной системы, квартовые координационные точки древнегреческих ладов имеют ту же естественно-физиологическую основу. Передувание на духовых инструментах давало призвуки натурального строя, безусловно, различавшиеся древними. Поэтому для музыкальных мастеров духовых инструментов, при изготовлении которых требовалась подгонка отверстий, было необходимо знание определенной суммы естественно-акустических законов. Это давало возможность добиваться не только «наилучшего» качественного звучания каждого отдельного инструмента, но и использовать фонизм гармоник для придания характерных свойств инструментам (резкого звука авлоса, более мягко звучащей сиринги, состоящей из 5, 7, 9 стволов и т. д.), пригодных для целей определенного эстетического и этического воздействия. Те же проблемы, можно предположить, возникали при изготовлении и игре на струнных инструментах. Описание игры на кифаре, содержащееся в стихотворении Агафия Схоластика, написанном в VI в. н э. (Anthologia Graeca XI 352, пер. Ю. Шульц; цит. по: Цыпин 1998, 11), свидетельствует о том, что музыканты-исполнители, а, соответственно, и слушатели были знакомы с эффектом возникающих при игре призвуков:

Андротиона, который прекрасно играл на кифаре,
Некто спросил о его славном искусстве игры:
«Крайнюю правую плектром ты тронул струну и за нею,
Будто сама по себе, слева трепещет струна.
Тонкий разносится звук, и ответная трель раздается,
Хоть и пришелся удар только по правой струне.
Я удивлен: натянув бездушные жилы, природа –
Как бы созвучье им всем совокупно дала».

Это стихотворение может служить поэтически выраженным доказательством практического знания хорошо слышимых первых гармоник. Явное же доказательство содержится в «Музыкальных проблемах» Псевдо-Аристотеля, XIX 11, 13, 17, 20, 23, 24, 39 и 42. Приведем некоторые из них:

«13. …в октаве высокий антифон порождается низким [звуком]» (Pseudo-Aristoteles 1895, 63).

«23. Почему *нета* является двойной в сравнении с *гипатой*? … не потому ли, что ущипнув половину струны и целую струну, мы получаем октаву? То же и у сиринг: голоса, производимые через среднее отверстие и на всей сиринге, звучат в октаву. И на авлосах двойной интервал дает октаву, чем пользуются изготовители авлосов. И те, кто делает сиринги, затыкают воском конец *гипаты* и середину *неты*. Так же они получают квинту как полуторный интервал и кварту как эпитритный. Далее, *гипата* и *нета* на треугольных псалтериях при равном натяжении дают созвучие октавы, если одна струна вдвое длиннее другой (Pseudo-Aristoteles 1895, 90–91; Щетников 2012, 87–88).

«24. Почему, если ущипнуть одну *нэту*[10], а потом остановить ее, *гипата* будет казаться откликнувшейся в ответ? Не потому ли, что они производят по природе голоса, которые дают отклик через наличие созвучия? Ведь если их усилить вместе, то подобные произведут одно, а прочие не проявят себя по причине своей малости (Pseudo-Aristoteles 1895, 70–71; Щетников 2012, 92).

«42. Ведь мы знаем, что *нэта* не движется, потому что она остановлена; и когда мы видим, что *гипата* свободна, и слышим ее, мы думаем, что *гипата* издает этот звук (Pseudo-Aristoteles 1895, 73; Щетников 2012, 95).

Как видно, в этих проблемах обсуждается простейший для нас опыт, который выявляет акустическую зависимость соотношения звуков античной совершенной системы – гипаты и нэты, находящихся на расстоянии октавы.

Итак, *натуральный обертоновый ряд звуков* (*бесконечный по своей природе*) *как целостная теоретически завершенная шкала* (*или ее часть*) *с фиксированными отношениями обертонов-призвуков у древних не существовал.*

Тем не менее, *все интервалы, используемые эллинами, найденные ими математическим или опытным путем, содержатся в натуральном обертоновом звукоряде и, соответственно, совпадают с отношениями призвуков основного тона.*

В этой связи следует напомнить, в первую очередь, о большой терции

5 : 4

Архита, найденной с помощью *арифметической средней* между квинтой

3 : 2

и унисоном

1 : 1,

квартой

4 : 3

и уменьшенной малой терцией

7 : 6

и так называемой «чистой», звучащей без биений из-за ее совпадения с первой хорошо прослушиваемой большой терцией натурального звукоряда, в отличие от дитона, состоящего из суммы больших секунд

$^{9}/_{8} \cdot {}^{9}/_{8} = {}^{81}/_{64}$

искусственного происхождения.

Для того, чтобы показать соответствие интервалов, найденных математическим путем, приведем Таблицу натурального обертонового ряда звуков, построенную от C_1 (До контроктавы), включающего 66 частичных тонов[11].

Эта таблица дает возможность, во-первых, сверять по ней все употребляемые древними греками интервалы, во-вторых, устанавливать их количественную и качественную величину. Например, интервал $^{16}/_{15}$, совпадающий с отношениями соответствующих частичных тонов (призвуков), употребляемый в диатоне и хроме Дидима, твердом диатоне Птолемея, – это малая секунда; интервал $^{28}/_{27}$, совпадающий с отношением 28-го и 27-го призвуков, используемый в диатоне Архита, мягкой хроме и в тоновом диатоне Птолемея, – это уменьшенная малая секунда, и так далее.

Таблица I

ЗВУКОРЯД НАТУРАЛЬНОГО ОБЕРТОНОВОГО СТРОЯ

Безусловно, знание древних ученых обертонового ряда можно считать преждевременным, ведь для этого потребовалась бы не только знание математики, достигшего в период античности высокого уровня, но и развитая система экспериментальных доказательств, а как говорилось выше, время подлинных научных экспериментов еще не наступило. Тем не менее, удивительным и в то же время весьма убедительным представляется факт полного совпадения математически вычисленных интервалов с соотношением гармоник натурального обертонового ряда, более того, в ряде случаев с целостными структурами большинства родов.

Проверим это совпадение. Для правильного понимания описываемых явлений необходимо иметь перед собой таблицу натуральной обертоновой шкалы (*Таблица I*). При этом следует обратить внимание на то, что гармоники этой шкалы с дополнительными символами (–) и (+), не имеющие адекватного нотного знака, входят в состав почти всех родов за исключением твердого диатона Птолемея (он же диатон Дидима) и связаны с низким 7 (b^-) и 11 (fis^-) и их производными:

7 (b^-), 14 (b^-), 21 (f^-), 28 (b^-), 35 (d^-), 42 (f^-), 49 (gis$^-$ $^-$или g$^+$), 56 (b^-), 63 (c^-)

и т. д.; обертон № 49 соответствует обертону №7, построенному от C_1, и имеет дополнительный знак понижения; образует уменьшенную терцию:

$^7/_6 = {}^{49}/_{42}$; 11 (fis^-), 22 (fis^-), 33 (cis^-), 44 (fis^-), 55 (ais^-), 66 (cis^-) и т. д.

Единственный обертон № 23 в условных четвертьтонах $^{24}/_{23}$ и $^{23}/_{22}$, в сумме составляющих полутон в виде увеличенной малой секунды (энгармония Птолемея, рассматриваемая ниже), имеет индекс «+». Это обусловлено невозможностью с помощью нотной записи выразить его точную величину. Итак, № 23 – это fis^+ [12].

Предпримем попытку идентификации отрезков натурального обертонового ряда и математически составленных тетрахордов, лежащих в основе родовых структур.

При этом рассматриваемые разновидности родов, существовавшие в древнегреческой науке у Архита, Аристоксена, Эратосфена, Дидима Александрийского и собственно К. Птолемея, приводятся по его трактату «Гармоники» (II 14, Düring 1930, 70–73), но в обратном птолемеевскому порядке.

Так, в *диатоне твердом* или *напряженном* (διάτονον σύντονον) Дидима и Птолемея, имеющем математическое выражение

$$^{10}/_{9} \cdot {}^{9}/_{8} \cdot {}^{16}/_{15} = {}^{4}/_{3},$$

где $^{10}/_{9}$ – это отношение звуков *e*/*d*↓ (большая секунда), $^{9}/_{8}$ составляет отношение *d*/*c*↓ (также большая секунда), а $^{16}/_{15}$ характеризует отношение *c*/*h*↓, расположенное на октаву выше. Выясняется, что интервал малой секунды $^{16}/_{15}$ (*c*/*h*) невозможно перенести для упорядочивания на октаву вниз, так как этого отношения звуков нет в обертоновой шкале. То же самое относится и к последующим расчетам тетрахордальных структур, связанных с необходимостью перенесения интервалов вверх, а не вниз.

В целях упорядочивания при перенесении больших секунд $^{10}/_{9}$ и $^{9}/_{8}$ на октаву вверх

$$^{20}/_{18}\ ({}^{10}/_{9} \cdot 2) \cdot {}^{18}/_{16}\ ({}^{9}/_{8} \cdot 2) \cdot {}^{16}/_{15} = {}^{4}/_{3}$$

возникает тетрахордальное последование *e–d–c–h*, тоново-ступеневая структура которого 1, 1, ½, (при записи от высоких тонов к низким, что и соответствует прочтению древними греками всех звукорядов – сверху вниз, но *тоново-ступеневые структуры принято записывать при прочтении снизу вверх*). Эта структура является основанием для *дорийского* лада и его производных (гипо- и гипердорийского ладов).

В *диатоне тоновом* или *среднем* (διάτονον τοναῖον, ἡ μέσον) Архита и Птолемея, представленном пропорцией

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3},$$

число $\frac{9}{8}$ – это отношение большой секунды $d/c\downarrow$, $\frac{8}{7}$ передает отношение $c/b^{-}\downarrow$ – увеличенной секунды, а число $\frac{28}{27}$ – представляет отношение $b^{-}/a\downarrow$ – уменьшенной секунды двумя октавами выше. Два последних интервала в сумме составляют интервал чистой малой терции $\frac{32}{27}$. В целях упорядочивания необходимо большую $\frac{9}{8}$ и увеличенную секунды $\frac{8}{7}$ перенести вверх на две октавы:

$$\frac{36}{32}\left(\frac{9}{8} \cdot 4\right) \cdot \frac{32}{28}\left(\frac{8}{7} \cdot 4\right) \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}.$$

В результате выстраивается тетрахордальная структура тонового диатона $d–c–b^{-}–a$, совпадающая с соответствующим отрезком обертоновой шкалы в третьей и второй октавах. Тоново-ступеневая величина та же, что и в *диатоне твердом* – 1, 1, ½. Однако *диатон тоновый* (или *средний*) отличается от *диатона твердого* наличием увеличенной и уменьшенной секунд, составляющим малую терцию. Он также входит в *дорийскую* группу ладов.

Диатон ровный (διάτονον ὁμαλον) Птолемея выражается как

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{12}{11} = \frac{4}{3},$$

где $\frac{10}{9}$ по обертоновой шкале составляет отношение $e/d\downarrow$ (большую секунду), $\frac{11}{10}$ – это уменьшенная (пониженная) большая секунда $fis^{-}/e\downarrow$, $\frac{12}{11}$ составляют малую секунду с небольшим увеличением $g/fis^{-}\downarrow$. Уменьшенная большая секунда и увеличенная малая секунда составляют чистый интервал – малую терцию $\frac{6}{5}$. При записи от высоких тонов к низким *ровный диатон* представляется как

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{3}.$$

Это дает высотно последовательный ряд звуков $g – fis^{-} – e – d$, полностью совпадающий с отрезком звукоряда обертоновой шкалы. Тоново-ступеневая структура *ровного диатона*, условно выраженная как ½, 1, 1, является основанием *лидийского* лада и его производных.

В *диатоне мягком* (διάτονον μαλακόν) Птолемея, имеющем математическое выражение

$^{8}/_{7} \cdot {}^{10}/_{9} \cdot {}^{21}/_{20} = {}^{4}/_{3}$,

в котором увеличенная секунда $^{8}/_{7}$ – это отношение тонов $c/b^{-}\downarrow$, большая секунда $^{10}/_{9}$ выражает отношение $e/d\downarrow$, а уменьшенная секунда $^{21}/_{20}$ – это отношение тонов $f^{-}/e\downarrow$. Из-за невозможности перенести уменьшенную секунду $^{21}/_{20}$ ($f^{-}/e\downarrow$) вниз, так как ее нет в отрезке первой октавы обертоновой шкалы, в целях упорядочивания возникает необходимость перенесения увеличенной секунды $^{8}/_{7}$ ($c/b^{-}\downarrow$), на полторы октавы вверх, а большой секунды $^{10}/_{9}$ ($e/d\downarrow$) на одну октаву вверх. При этом интервалы увеличенной секунды

$^{24}/_{21} \; ({}^{8}/_{7} \cdot 3) \; g/f^{-}\downarrow$

и уменьшенной секунды

$^{21}/_{20} f^{-}/e\downarrow$,

дополняя друг друга, образуют чистую малую терцию

$g - e\downarrow: {}^{6}/_{5} \; [{}^{24}/_{21} \cdot {}^{24}/_{20} \; ({}^{6}/_{5} \cdot 4) = {}^{6}/_{5}]$.

Складывается структура мягкого диатона

$g - f - e - d$,

в виде пропорции соответствующая обертоновой шкале как отношение

$^{24}/_{21} \; ({}^{8}/_{7} \cdot 3) \cdot {}^{21}/_{20} \cdot {}^{20}/_{18} \; ({}^{10}/_{9} \cdot 2) = {}^{4}/_{3}$.

В тоново-ступеневом выражении структура *мягкого диатона* (1, ½, 1) является основой тетрахорда *фригийского* лада и его производных.

Таким образом, логически определяемые и, предположительно, достаточно хорошо прослушиваемые тетрахордальные структуры *диатонического* рода возникают на основе натурального обертонового ряда. Они содержатся в основе древних и наиболее употребимых ладов – дорийского, лидийского, фригийского (напомним, что «из всех родов диатонический – более естественный»; он доступен «даже для необученных» – Г. Пахимер). Рассуждая об эстетической значимости диатона, Г. Пахимер пишет, что *диатон твердый* отмечен как имеющий «важный, сильный и благозвучный характер», *диатон тоновый* – как «молчаливый и свободный», *диатон ровный* «разрешает состояние души (ἔθος) и делает его благозвучным», *диатон мягкий* «называется так благодаря обнаружению молчаливого и мирного характера и некоторым образом более ослабленного, тихого состояния, чем в тоновом» (Пахимер, 426. Цит. по: Лосев 1960, 227). Как видно, два вида диатона – *твердого* и *тонового*, определивших интервальные и высотные разновидности *дорийского* лада в определенной степени связаны с его предпочтительностью и, соответственно, большей распространенностью в древнегреческой музыке. Будучи «из всех ладов самым низким... и по характеру самым мужественным» (Aristides Quint. 1963, II 14, 146) он предстает как «образец единственной истинно-эллинской гармонии» (Платон. Лахет. 188 d, пер. С. Я. Шейнман-Топштейн).

Таким образом, вполне очевидно, что наибольшая распространенность диатона в античной музыке имеет под собой глубинное основание, заложенное самой природой.

К категории диатона относился также так называемый *диатон дитонный* Эратосфена и Птолемея, имеющий структуру

$$^9/_8 \cdot {}^9/_8 \cdot {}^{256}/_{243} = {}^4/_3$$

с дважды повторенным интервалом $^9/_8$ и не находящий отражения в натуральном обертоновом звукоряде. Известно, что у всех древних писателей целый тон определялся как разность между квартой и квинтой ($^9/_8$). Он встречается в филолаевских фрагментах, в «Тимее» Платона, у Эратосфена, Аристоксена, Псевдо-Евклида. Писатели I тысячелетия называют его «пифагорейским», иногда этот вид диатона приписывается Пифагору (Птолемей, Никомах и др.). Птолемей обосновывает популярность этого диатона практикой кифаредов, для которых этот тетрахорд был «весьма удобным», поскольку давал возможность настройки с помощью чистых квинт. При этом сначала настраивались по чистым квинтам и квартам постоянные струны[13], ограничивающие тетрахорды: гипату, месу, парамесу, нэту, затем внутренние подвижные: от месы на кварту выше настраивалась паранэта, от паранэты на квинту ниже – лиханос, от лиханоса на кварту выше – трита, от триты на квинту ниже – паргипата. Древние греки называли это «определением членов при помощи консонансов».

Каким образом происходил поиск и отбор интервалики и построение классического *диатона дитонного*, иллюстрирует К. Птолемей: «Наряду с уже рассмотренным diatonon syntonon они (кифареды) ставят еще другой род тональности (разновидности тетрахорда. – *Л. А.*), который близок к первому и, кроме того, весьма удобен. Два высших <интервала> они берут равными целым тонам, а последний равняется полутону, как думают они сами, но на самом деле, как показывают теоретические вычисления, равняется леймме. Этот род тональности употребляется ими, если отношение 9 : 8 высшего тона не отличается существенно от 10 : 9, а также если низший тон, имеющий отношение 16 : 15, мало отличается от леймы...» («Гармоники» I, 16 Düring 1930, 39; Ван дер Варден 1959, 421, пер. И. Н. Веселовского). Ясно, что в данном случае речь идет о сравнении *диатона твердого*

$^{10}/_{9} \cdot {}^{9}/_{8} \cdot {}^{16}/_{15}$

и *диатона дитонного*

$^{9}/_{8} \cdot {}^{9}/_{8} \cdot {}^{256}/_{243}$.

По словам Птолемея, помимо преимущества удобной и точной настройки, диатон дитонный обладал более легкой возможностью модулирования[14] (Ван дер Варден 1959, 423). Насколько это характерно для музыкальной практики эпохи Аристоксена, говорит тот факт, что для него диатон дитонный был в качестве основного и единственного (там же, 423–424)

Таким образом, восприятие и использование иррациональной величины – лейммы $^{256}/_{243}$, которая в диатоне дитонном определяется по остаточному принципу, присуще тем, кто больше «доверяет слуховым ощущениям», чувственному восприятию и «данным опыта». Эти явления связаны с использованием качественной основы интервалики и, как известно, присущи школе «гармоников» – Аристоксену и его последователям.

Рассмотрим возможности совмещения математически составленных структур *хроматического* рода с отрезками натурального обертонового ряда.

Хрома твердая, напряженная (χρῶμα σύντονον) Птолемея состоит из отношения интервалов

$^{7}/_{6} \cdot {}^{12}/_{11} \cdot {}^{22}/_{21} = {}^{4}/_{3}$,

где $^{7}/_{6}$ выражает отношение уменьшенной терции $b^{-}/g\downarrow$, $^{12}/_{11}$ составляет отношение увеличенной малой секунды $g/\mathit{fis}^{-}\downarrow$, которая в то же время меньше по величине большой секунды, а интервал $^{22}/_{21}$ равен отношению малой секунды $\mathit{fis}^{-}/f^{-}\downarrow$. Теоретически сумма интервалов равна чистой кварте. Но для приведения в тетрахордальное соответствие, способствующее совпадению с обертоновой шкалой, требуется перенесение уменьшенной терции $^{7}/_{6}$ ($b^{-}/g\downarrow$) на две октавы вверх, а увеличенной малой секунды $^{12}/_{11}$ ($g/\mathit{fis}^{-}\downarrow$) на одну октаву вверх. Математическое выражение интервального состава *твердой хромы* –

$^{28}/_{24}\,({}^{7}/_{6} \cdot 4) \cdot {}^{24}/_{22}\,({}^{12}/_{11} \cdot 2) \cdot {}^{22}/_{21} = {}^{4}/_{3}$,

звуковая структура представлена как

$b^{-} – g – \mathit{fis}^{-} – f^{-}$,

где интервал $b^{-} – \mathit{fis}^{-}\downarrow$ образует уменьшенную кварту (по количественной величине – большую терцию), которая дополняется до тетрахорда малой секундой *fis*$^{-}$–*f*$^{-}$↓. *Тоново-ступеневое* выражение *твердой хромы* определяется как $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

Возможен и другой вариант приведения в тетрахордальное соответствие, относящийся к *хроме Эратосфена*. В ней исходная малая терция $\frac{6}{5}$, сохраняя звуковое выражение как *g*/*e*↓, переносится на две октавы вверх

$(\frac{6}{5} \cdot 4 = \frac{24}{20})$.

Соответственно сумма дополняющих до тетрахордовой последовательности полутонов математически выражается как

$\frac{20}{19} \cdot \frac{19}{18} = \frac{10}{9}$ (*e*/*es*↓ · *es*/*d*↓= *e*/*d*↓).

Тетрахордальная структура *хромы* Эратосфена в этом случае записывается следующим образом:

$\frac{24}{20}$ $(\frac{6}{5} \cdot 4) \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{19}{18} = \frac{4}{3}$,

в звуковом выражении: *g–e–es–d,* в *тоново-ступеневом* – соответственно $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

Мягкая хрома (χρῶμα μαλακόν) Птолемея, изначально определенная как

$\frac{6}{5} \cdot \frac{15}{14} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$,

при перенесении малой терции во вторую-третью октавы

$\frac{6}{5} \cdot 6 = \frac{36}{30}$,

а увеличенной малой секунды на октаву вверх

$\frac{15}{14}\,2 = \frac{30}{28}$

получает выражение

$\frac{36}{30} \cdot \frac{30}{28} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$.

Звуковая структура *мягкой хромы* занимает отрезок натурального ряда в границах тетрахорда *d– h – b*$^{-}$*– a, тоново-ступеневый* состав которого $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

Аналогичным способом обнаруживается возможность совмещения структур энгармонического рода, составленных математически, и отрезков натурального обертонового ряда.

Энгармония (ἐναρμόνια) Птолемея, выраженная через пропорцию

$\frac{5}{4} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{46}{45} = \frac{4}{3}$,

представляет собой отношение большой терции $\frac{5}{4}$ (*e*/*c*↓) и двух условных неравных четвертьтонов

$^{24}/_{23}$ (*g*/*fis*$^{-}\downarrow$) и $^{46}/_{45}$ (*fis*$^{-}$/*f*$\downarrow$),

составляющих полутон. В целях звукорядного соответствия эту энгармоническую структуру можно упорядочить следующим способом. Перенесем большую терцию $^{5}/_{4}$ на высоту, соответствующую отношению

$^{60}/_{48}$ ($^{5}/_{4} \cdot 12$),

а четвертьтон $^{24}/_{23}$ на октаву выше

$^{48}/_{46}$ ($^{24}/_{23} \cdot 2$).

Складывается пропорция

$^{60}/_{48}\,(^{5}/_{4} \cdot 12) \cdot {}^{48}/_{46}\,(^{24}/_{23} \cdot 2) \cdot {}^{46}/_{45} = {}^{4}/_{3}$,

отражающая отношение интервалов структуры тетрахорда *h*– *g* – *fis*$^{-}$ – *fis* в обертоновой шкале. *Тоново-ступеневое* выражение *энгармонии* Птолемея 2, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{4}$.

В *энгармонии* Дидима

$^{5}/_{4} \cdot {}^{32}/_{31} \cdot {}^{31}/_{30} = {}^{4}/_{3}$

возникает необходимость перенесения большой терции в третью октаву, в результате чего числовое выражение энгармонии предстоит в следующем виде:

$^{40}/_{32}\,(^{5}/_{4} \cdot 8) \cdot {}^{32}/_{31} \cdot {}^{31}/_{30} = {}^{4}/_{3}$.

Сумма же двух условных четвертьтонов

$^{32}/_{31} \cdot {}^{31}/_{30} = {}^{32}/_{30}$

составляет полутон. В целом выстраивается структура энгармонического рода Дидима

e – *c* – *his*$^{-}$ – *h*.

В *тоново-ступеневом* выражении это 2, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{4}$.

Попытка идентифицировать некоторые математически вычисленные родовые структуры и целостные тетрахордальные отрезки натурального обертонового ряда приводит к невозможности свести их в последовательный ряд звуков. *Составленные чисто математическим путем, они не получают отражения в представленном отрезке обертоновой шкалы, включающей только 66 призвуков*[15]. Это, в первую очередь, относится к родовым структурам, имеющим в составе величины $^{256}/_{243}$ и $^{243}/_{224}$, являющиеся условными полутонами (уточним, что сумма этих интервалов составляет увеличенный тон $^{8}/_{7}$ – $c/b^{-}\downarrow$), к тому же данные призвуки практически невозможно адекватно представить в нотной записи.

К этой группе родовых образований относится *диатон* Эратосфена, он же *диатон дитонный* Птолемея

$^{9}/_{8} \cdot {}^{9}/_{8} \cdot {}^{256}/_{243} = {}^{4}/_{3}$,

хрома Архита

$^{32}/_{27} \cdot {}^{243}/_{224} \cdot {}^{28}/_{27} = {}^{4}/_{3}$.

Данные интервалы – $^{256}/_{243}$ и $^{243}/_{224}$ – вычисляются по остаточному принципу путем вычитания из кварты *дитона*

$^{9}/_{8} \cdot {}^{9}/_{8} = {}^{81}/_{64}$

и соотношения

$^{32}/_{27} \cdot {}^{28}/_{27}$,

составляющего полутон $^{16}/_{15}$. Более того, каждая числовая пропорция соответствует только одному соотношению призвуков, в этом смысле $^{9}/_{8}$ отражает единственное соотношение $d/c\downarrow$ первой октавы. Следовательно, с точки зрения совпадения с натуральным звукорядом, *диатон дитонный* составлен искусственно, *по подобию*.

Также не находят отражения в натуральном обертоновом звукоряде в качестве *целостной* структуры математически вычисленная *энгармония* Архита

$^{5}/_{4} \cdot {}^{36}/_{35} \cdot {}^{28}/_{27} = {}^{4}/_{3}$.

Составленная с использованием натуральной (архитовой) большой терции $^{5}/_{4}$, она может быть представлена только как пропорция

$^{40}/_{32}\,({}^{5}/_{4} \cdot 8) \cdot {}^{32}/_{31} \cdot {}^{31}/_{30} = {}^{4}/_{3}$,

звуковой состав которой – тетрахорд

$e - c - h^{+} - h$.

Но в источниках нет указания на наличие подобного структурного образования. К тому же она мало будет отличаться от энгармонии Дидима

$e - c - his^{-} - h$,

поскольку звуковысотная разница his^{-} и h^{+} – иррациональная величина, невыразимая через нотную запись и неразличимая слухом.

Математически вычисленная *хрома* Дидима

$^{6}/_{5} \cdot {}^{25}/_{24} \cdot {}^{16}/_{15} = {}^{4}/_{3}$.

обнаруживает невозможность построения тетрахордальной структуры на основе обертонового ряда. С использованием полутона $^{16}/_{15}$ (*c/h*↓), входящего в структуру хромы Дидима, полутона $^{17}/_{16}$ (*cis/c*↓), малой терции $^{20}/_{17}$ (*e/cis*↓) возможно построить хрому в виде пропорции

$^{20}/_{17} \cdot {}^{17}/_{16} \cdot {}^{16}/_{15} = {}^{4}/_{3}$.

Это соответствует тетрахордальной структуре *хромы*

e – cis – c – h.

Но свидетельства о хроме с такой структурой неизвестны.

Как видно, построение тетрахордов хромы Дидима и энгармонии Архита несовместимо с отрезками 66-тизвукового обертонового ряда. Этот факт подтверждает чисто научный подход к измерению интервалов, что исходит, как известно, из пифагорейских традиций. В частности, Б. Л. Ван дер Варден, ссылаясь на гипотезу П. Таннери (Tannery, 105), пишет, что «Архит получил квинту и кварту в результате деления октавы при помощи арифметической или гармонической средних, а интервалы (4 : 5), (5 : 6), (6 : 7) и (7 : 8) – в результате деления квинты и кварты по тому же рецепту» (Ван дер Варден 1959, 418).

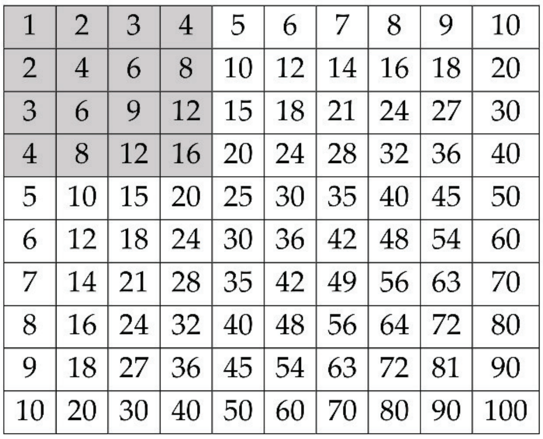
В то же время обертоновый ряд является тем природным пространством, из которого черпаются как отрезки-звукоряды, складывающиеся в последовательные тетрахордальные структуры, так и отдельные интервалы, найденные математически путем. Можно предположить, что на практике использование математически построенных структур осуществлялось *по подобию*, что требовало большого мастерства (напомним слова Г. Пахимера: «Хрома более искусна. Она поется только у получивших обучение. Более щепетилен энгармонический род: большинству он недоступен»).

Итак, родовые структуры представляют собой результат математических исчислений путем сложения или вычитания интервалов, применения арифметической и гармонической пропорций *вне предустановленной опоры на звукорядную последовательность обертоновой системы.* В то же время *каждая интервальная величина, взятая изолированно, может быть отождествлена с соотношением призвуков и, соответственно, иметь место в обертоновой шкале.* Многие из них *могут быть упорядочены в звукорядную тетрахордальную последовательность, и в этом смысле опираться естественную акустическую основу.*

Возвращаясь к уже ставшему риторическим вопросу, знали ли греки натуральный обертоновый ряд, обратимся к единственному источнику, который отвечает на заданный вопрос положительно с попыткой обосновать эту проблему (а мы бы сказали *приблизиться к знанию*). На нее обратил внимание в VII в. Анания Ширакаци, математик, песнетворец и ученый музыкант раннесредневекового периода Армении. Доказательством знания обертоновой шкалы, по его мнению, является «десятирядовая таблица» неопифагорейца Никомаха (Тагмизян 1977, 125, табл. 42; Александрова 2009, 177–178, табл. I, II,), возникшая на основе «четырехрядовой таблицы» Пифагора[16].

Таблица II

ТАБЛИЦА ПИФАГОРА–НИКОМАХА



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(Цветом выделена Таблица Пифагора)

«Десятирядовая таблица» Никомаха, ставшая научным обобщением достижений предшественников Архита Тарентского, Дидима Александрийского и других ученых, служила выражением строгой системы целочисленных отношений. Для музыкальной науки она представляет интерес совпадением показателей числовых отношений и *возможностью* числовых выражений частичных тонов натуральной обертоновой шкалы до 100 призвука.

Сопоставление пифагорейской «четырехрядовой таблицы», принятой в качестве основы *консонантных* интервалов и соотношения частичных тонов натурального обертонового ряда до 16 призвука включительно обнаруживает их полное совпадение (Тагмизян 1977, 111, пример 35, 36; Александрова 2009, 178, примеры 1, 2, 3).

«Десятирядовая» таблица Никомаха способствует выявлению более обширного спектра интервалов, используемых древними, например, разнокачественных больших секунд

$^{8}/_{7}$, $^{9}/_{8}$, $^{10}/_{9}$,

малых секунд

$^{16}/_{15}$, $^{25}/_{24}$, $^{27}/_{25}$,

натуральной большой терции $^{5}/_{4}$ и терции пифагорейского строя $^{81}/_{64}$ и многих других (интервалы же пифагорейского строя, как выше было показано, вычислялись математически – через арифметическую и гармоническую пропорции, путем сложения и вычитания известных интервалов).

Несмотря на то, что в трудах древних ученых нет прямых указаний на знание закономерностей натурального обертонового ряда звуков как *физического явления*, этот факт не помешал им «составить правильные представления (разрядка моя. – *Л. А.*) о натуральном звукоряде, вскрыть закономерности его строения и установить строгое соответствие, имеющееся, с одной стороны, между натуральным рядом простых чисел, а с другой, – натуральными рядами звуков. Данное достижение александрийских ученых, выражавшееся в десятискальной натуральной системе тонов, представляет бесспорный научный интерес не только с точки зрения истории развития музыкальной акустики, но и в смысле фиксации и обобщения явлений музыкальной практики своего времени» (Тагмизян 1977, 118).

Итак, подобное совпадение дает возможность сделать предположение о том, что древние могли иметь представление о натуральном обертоновом звукоряде. «Десятирядовая таблица», наряду с *другими обобщающими задачами*, была также математической формой выражения закономерностей, лежащих в основе натуральной обертоновой шкалы.

Дополнение 1. Говоря об акустике, невозможно обойти вниманием еще один момент, следующий из работы Плутарха «О рождении души по *Тимею*» (Сидаш 2008, 53–114). Возвращаясь к постулату о единстве мироздания, постигаемом древними через *число*, в котором музыкально-математико-астрономический синтез играл основополагающую роль, выделим вопрос о единстве пифагорейского акустического поля и космического пространства, представленного Плутархом. Трактат Плутарха имеет характер экзегезы известного трактата Платона. Находясь, в целом, на пифагорейско-платоновских позициях, Плутарх излагает собственную интерпретацию космического ряда. Это – Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн. Но впереди этих планет он ставит филолаевские Гестию (Огонь), Антиземлю, Землю, а в конце – неподвижные звёзды. При этом он наделяет весь ряд числовой символикой, исходящей из платоновской нечётной числовой структуры (1, 3, 9, 27), рождённой *геометрической прогрессией со знаменателем* 3: «Многие вносят сюда пифагорейские [мнения], утраивая расстояния [небесных] тел от центра» (Сидаш 2008, 100).

Итак, Гестии надлежит быть первой, каждый последующий числовой показатель – результат умножения предыдущего на 3, при этом числом кругообращения Луны является 27 и далее Меркурия – 81[17], Венеры – 243, Солнца – 729... Следуя логике Плутарха, полностью этот планетно-числовой ряд можно представить следующим образом:

Гестия	Антиземля	Земля	Луна	Меркурий	Венера
1	3	9	27	81	243

Солнце	Марс	Юпитер	Сатурн	неподвижные звёзды
729	2187	6561	19683	59049

В такой трактовке Плутарха конструктивное устройство Вселенной, обнаруживает логическую связь космоса и музыкальной акустики, в которой звуковое пространство оказывается тождественным космическому через числовое выражение. Так, образование пифагорейского акустического строя показывает, что числители восходящего квинтового ряда соответствуют тем же числам от единицы до 59049 (десятая квинта): **1**, **3**/2, **9**/8, **27**/16, **81**/64, **243**/128, **729**/512, **2187**/2048, **6561**/4096, **19683**/16384, **59049**/32768. При построении же нисходящего квинтового ряда эти числа переходят в знаменатели и так же охватывают десять квинтовых шагов: **1**, 2/**3**, 8/**9**, 16/**27**, 64/**81**, 128/**243**, 512/**739**, 2048/**2187**, 4096/**6561**, 16384/**19683**, 32768/**59049**. Поскольку пифагорейский строй, соответствуя космической бесконечности, незамкнутый, можно добавить логическое умозаключение о том, что числовые показатели всех последующих квинтовых шагов отодвигают «неподвижные звёзды» далее в космическое пространство[18].

Таким образом подтверждается соответствие между десятью планетными сферами космического пространства и их акустическим выражением через число, которое, по словам Филолая, есть «всемогущая и самородная часть вечного пребывания космических вещей» (Ямвлих. Комментарий к «Арифметике» Никомаха, с. 10, 20 Pist; цит. по: Лебедев 1989, 446).

Дополнение 2. Пифагорейский акустический строй показал свою жизнеспособность, сохраняя востребованность в течение всей эпохи Средневековья (V–XII вв.) в условиях монодийности звуковысотной организации музыки. Новые эстетические требования, в частности, в области музыки, связанные с зарождением многоголосия в хоровом искусстве в виде гармонической вертикали, вызвали к жизни *чистый* строй, использующий натуральную (архитову *чистую,* без биениий) терцию, пришедшую на смену дитону $^{81}/_{64}$. Образовался квинтово-терцовый строй, пригодный для построения созвучий по вертикали (Предренессанс, Ренессанс XIII–XVI вв.). Формирующаяся тонально-гармоническая система (Барокко и Просвещение XVII–XVIII вв.) вызвала к жизни поиски иного акустического качества строя – темперации, существовавшей вначале в различных вариантах неравномерно темперированных строёв, а затем и равномерной темперации. Это способствовало возникновению классической тонально-гармонической системы с энгармоническим равенством звуков, использованием гармонических оборотов в их функциональной зависимости, энгармонических модуляций и прочих средств музыкальной выразительности.

Таким образом, античная музыкальная теория, как и все сферы – науки, философии, искусства, литературы – простёрла своё действие в пространство теории музыки всех последующих эпох в областях: ладовой организации, с ее структурной тетрахордальностью и кварто-квинтовой координацией, функциональной соотнесенностью тонов лада, модуляционностью и т. д. И в этом ее непреходящая ценность.

Примечания

[1] Древние различали рассуждения о числах (искусство арифметики) и искусство счета (логистику). Искусство арифметики направлено на познание четных и нечетных чисел (Платон. Горгий 450–451b, 481–482, пер. С. П. Маркиша). По словам П. Таннери «...когда говорится об арифметике у греков, следует подразумевать только учение о свойствах чисел, исключив все, относящееся к счислению, т.е. то, что, по крайней мере, со времен Платона называлось “логистикой”. Установление различия между отвлеченной наукой и конкретным искусством счисления предание единодушно приписывает Пифагору...» (Таннери 1902, 305).

[2] Запись восходящих квинт производится в соответствии с древнегреческой традицией, при которой числитель помещался внизу, знаменатель наверху дроби. Запись нисходящих квинт осуществляется соответственно в обратном порядке.

[3] Так называемая пифагорейская комма имеет приближенное значение $^1/_9$ тона; известна «дидимова комма», которая является разницей пифагорейской терции и архитовой чистой терции: $^{81}/_{64} : ^5/_4 = ^{81}/_{80}$ и составляет $\approx ^1/_{10}$ тона. Помимо коммы, лейммы, апотомы в теории музыки изучались также величины – *схисма,* составляющая половину коммы, *диасхисма,* составля-

ющая половину лейммы. Описывается у «последнего антика» – Боэция со ссылкой на Филолая (об этом подробно см. Герцман 1995, 81–82, где автор дает схему акустических составляющих пифагорейского целого тона, выраженного в центах). Показательно, что научное знание сохранялось в теоретических источниках в течение тысячелетия и дошло до нашего времени в подробном описании через Боэция. В то же время последовательное сознательное просчитывание в *музыкальной практике* столь малых величин вряд ли имело место.

[4] В литературе по акустике (Риман 1898, 21–32; Гарбузов 1940, *Музыкальная акустика*, 229–234), античной теории музыки (Герцман 1986, 80–81, 94–95) и других источниках приводятся систематизированные таблицы интервалов пифагорейского строя в акустических единицах – центах. Это дает возможность проведения сравнительного анализа количественной величины интервалов, например, полутоны $^{20}/_{19}$ и $^{19}/_{18}$, образующие в сумме целый тон $^{10}/_{9}$, соответственно составляют округленно 89 ц, 93,5 ц, 182,5 ц. Более того, выражение интервалов в центах дает определенное удобство при возможности представления мельчайших величин. Например, леймма $^{256}/_{243}$ примерно равна 90 ц., комма $^{531441}/_{524288}$ округленно составляет 23,46 ц. Однако при этом теряется изначальная *качественная* характерность и *различаемость* наиболее употребительных интервалов пифагорейского строя, например, «архитовой терции $^{5}/_{4}$», «пифагорейской терции $^{81}/_{64}$» и других.

[5] О приблизительности измерительной техники и ее значении для практики очень метко отозвался Абдурахман Джами в «Трактате о музыке», написанном в XV веке. Его высказывание имеет вневременную и внеисторическую сущность и характеризует живой исполнительский процесс: «Следует помнить, что это деление основано на приблизительности, а не на точном воспроизведении [тонов], ибо если палец исполнителя попадает немного выше или ниже места возникновения данного тона, то слух не уловит никакой разницы (в интонации этого тона). Следовательно, не нужно подвергать осуждению с точки зрения точности некоторые несовпадения в рассмотренном делении. Вместе с тем, конечным критерием определения семнадцати точек возникновения [тонов] является слух избранных в сем искусстве, ибо в силу несовершенства инструментов точность воспроизведения [тонов] не может быть осуществлена ни [при помощи] данного деления, ни [при помощи] какого-либо иного, стоящего ближе, как думают, к точному воспроизведению» (Джами 1960, 22).

[6] Например, индийский октавный звукоряд (по свидетельству индологов, опирающихся на древние источники – Матанги «Брихаддеши» VII в., Шарн-

гадевы «Сангитаратнакара» XIII в. и др.), не имеющий абсолютной высоты, содержит большие, малые, целые тоны и полутоны, а также микротоны – шрути (слышимое). Опорными тонами являются октава, квинта, кварта. Октавный звукоряд делится на 22 шрути, каждый из которых может образовывать свою систему микротонов, наделяться индивидуальными характеристиками и интонироваться выше или ниже в зависимости от настроения, душевного состояния исполнителя (Виноградов 1976, 23–24). Древние греки, по словам Г. Гельмгольца, имели более изощренный слух, нежели европейцы, воспитанные на темперированной системе... Греки и другие народы, которые обладали только гомофонной (монодийной) музыкой, добивались ее выразительности с помощью тонких и разнообразных оттенков ладов (Гельмгольц 2015, 381).

[7] Легенда о Пифагоре, которую рассказывает в 6 главе («Как был найден арифметический порядок звуков») своего трактата «Руководство по гармонике» Никомах Герасский, содержится в (Nicomachi Geraseni 1895, 245–248; «) «Никомаха из Герасы, пифагорейца, *Руководство...*» 2009, 183–184, пер. Т. Г. Мякина, Л. В. Александровой).

[8] Существует общее представление о том, что греческая наука была, в первую очередь, созерцательной. Эксперименты, как правило, проводились для того, чтобы *подтвердить* гипотезу, но не подвергнуть ее критической проверке. Типичным примером является теория атомизма Демокрита. Если бы удалось проверить в свое время аристотелевскую теорию падения и бросания тел с помощью экспериментов с падающими и брошенными телами, то ее пришлось бы отвергнуть. Только Стратон из Лампсака, именовавшийся «физиком», ученик Аристотеля, преодолев идеалистический подход, первоначально производил разноообразные физические опыты, заложив тем самым основы физики (Ван дер Варден, 410). Таким образом, античные ученые были, скорее, «наблюдателями природы, которые не вмешивались в ход ее процессов. Итак, античность созерцала, средневековье молилось и медитировало, Возрождение занялось экспериментом... потому, что в то время созерцательная установка человека по отношению к природе сменилась стремлением господствовать над ней» (Жмудь 1994, 222).

[9] Явление обертонов впервые было научно подтверждено в начале XVIII в. французским математиком и акустиком Жозефом Совёром (1653–1716) в 1701 г. Основываясь на исследованиях Марена Мерсенна (1588–1648), которому были известны явления призвуков, возникающие при резонировании, Совёр доказал существование натурального обертонового ряда. Он выдвинул точный способ определения числа колебаний звука при помощи

биений, научно объяснил феномен обертонов, ввёл понятие «основной тон», ставшее впоследствии фундаментальным понятием не только акустики, но и науки гармонии. Термин «акустика», использующийся в настоящее время в том же значении, также принадлежит Ж. Совёру (Рагс 1998, 20).

Не исключено, что натуральный строй был известен уже *Ибн-Сине*, жившем в XI в. (Гулисашвили 1969, 30) По заключению К. Закса (*Музыкальная культура Египта* 1937, 58–59; *Музыкальная культура Вавилона и Ассирии* 1937, 103–104), сделанном им на основании изучения инструментария в сохранившихся памятниках изобразительного искусства, а также благодаря расшифровке единственной сохранившейся древневавилонской таблички, еще древние вавилоняне, ассирийцы, египтяне имели в наборе интервалов инструментального сопровождения октаву, квинту, кварту, двойную октаву, секунду. Очевидно, они сумели вычленить эти же интервалы путем передувания на духовых инструментах как первые элементы обертонового ряда. Однако сведений о знании обертоновой шкалы не содержится ни в одном из источников.

[10] О названии звуков античной совершенной системы см. примечание 13.

[11] Основанием для построения таблицы послужила обертоновая шкала, содержащая частичные тоны с 1 по 16, имеющаяся в источниках, тем или иным образом связанных с акустикой. Это «Музыкальная акустика» под общей ред. Н. А. Гарбузова (Гарбузов, 1940, 17), статья Х. Зегера «Obertöne» в «Musiklexikon» (*Musiklexikon*, 231), «Учение о гармонии» Ю. Н. Тюлина (Тюлин, 34–38) и другие. В данных источниках предпринято построение акустического звукоряда от *C* большой октавы. Для охвата частичных тонов от 1 до 66 возникла необходимость построения звукоряда от *C*, (контроктавы). В труде Ю. Н. Тюлина содержится вариант шкалы от *C*, до 60 частичного тона, но без звуковысотных градаций (выраженных через «+» или «–»). При построении нашей шкалы использовались закономерности образования гармоник в границах от 1 до 66 обертона, высчитанных от 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13 частичных тонов. При этом за множимое берется номер исходного частичного тона. Так, гармоники третьего, четвертого, пятого, шестого, седьмого, девятого, одиннадцатого, тринадцатого порядков образуют собственные гармоники под соответствующими номерами, а в целом они составляют единый натуральный обертоновый ряд:

(*G*) 3 6 9 12 15 18 21^- 24 27 30 33^- 36 39^+ 42^- 45 48 51 54 57 60 63^-

(*C*) 4 8 12 16 20 24 28^- 32 36 40 44^- 48 52 56^- 60 64

(*e*) 5 10 15 20 25 30 35^- 40 45 50 55^- 60 65^+

(*g*) 6 12 18 24 30 36 42^- 48 54 60 66^-

(b^-) 7^-14^- 21^- 28^- 35^- 42^-49^{-} $^-$ 56^-63^-

(d') 9 18 27 36 45 54 63^-

(fis'^-) 11^- 22^-33^- $44^-55^-66^-$

(as'^+) 13^+ 26^+ 39^+ 52^+ 65^+

Замечание 1. Построение натурального акустического ряда – это попытка выстроить *логическим* путем систему обертонов, производных от *единого исходного тона.* При этом у разных авторов возможны варианты нотации промежуточных гармоник. Однако это не влияет на физическую данность обертоновой шкалы. *Уточненные звуковысотные показатели* каждого частичного тона легко могут быть определены при переводе дробных чисел в центы, но в этом случае теряются как звуковысотные (количественные), так и «качественные» ориентиры принадлежности к натуральной обертоновой шкале. Например, *хрома Эратосфена,* известная как соотношение

$^6/_5 \cdot {}^{19}/_{18} \cdot {}^{20}/_{19} = {}^4/_3$,

в центах представлена следующим образом:

315,6 + 93,6 + 88,8 = 498,0.

Мягкая хрома Птолемея, изначально определенная как

$^6/_5 \cdot {}^{15}/_{14} \cdot {}^{28}/_{27} = {}^4/_3$,

в акустических единицах (центах) выглядит так:

315,6 + 119, 4 + 63, 0 = 498, 0.

В своем труде «Гармоника в трех книгах» Птолемей приводит выражение тетрахордальных образований в *шестидесятиричной* системе счисления (разделение канона на 60 частей, в ладах, состоящих из двух тетрахордов на 120 частей) («Гармоники», кн. II, 14), восходящей к вавилонянам, древним шумерам.

Замечание 2: «7, 11, 13 и 14 гармоники выражены весьма неточно: 7-я гармоника ниже звука *b*, почти на $^1/_8$ целого тона, 11-я находится почти посредине между f^2 и fis^2, 13-я также находится почти посредине между as^2 и a^2 (ближе к as^2), 14-я является октавным удвоением 7-й гармоники» (Гарбузов 1940, 17). Процитированное относится к звукоряду, построенному от *C* большой октавы. То же самое относится и к звукоряду, образованному от *C*, контроктавы.

Замечание 3: обертон № 19 у Тюлина записан как dis^2 (Тюлин 1939, 38), однако в этом случае оказывается невозможным нотировать производный обертон № 57 (19, 38, 57), в противном случае его пришлось бы записать не как b^3, а ais^3, что исключает возможность следования обертона ais^3 после № 56 (b^{3-}), поэтому в нашей шкале №19 записан как es^2. Сложности такого рода возникают и в соотношении обертонов № 49 и № 50. Первый из них (№ 49) логичнее нотировать как $as^{3-\,-}$, но тогда невозможно нотировать № 50 как gis^{3-}. Поэтому № 49 обозначен как $gis^{3-\,-}$.

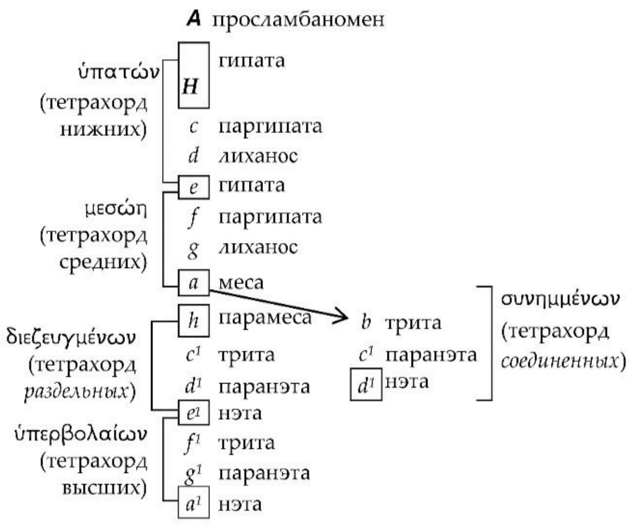
Замечание 4. Невозможность четко нотировать многие призвуки вызвала необходимость дополнительных обозначений, помещенных под основной обертоновой шкалой. Это обертоны №№ 31, 37, 49, 55, 62. Теоретически этот список может быть продолжен.

[12] У Ю. Н. Тюлина fis^+ записан как *fisis* (Тюлин 1939, 38).

[13] Античная система имела структуру, состоящую из тетрахордов *раздельных* или *соединенных* с названиями звуков, определяющими их структурное место (нэта – высшая, меса – средняя, парамеса – околосредняя, гипата – нижняя, прослямбаномен – добавочный и т. п.) или способ взятия струны указательным пальцем – лиханос. В нижеприведенной схеме приведена полная античная совершенная система на основе *гиподорийского строя* в *диатоническом роде*.

Схема I

18-звуковая (полная) античная музыкальная система



[14] Под модуляциями в данном случае подразумеваются переходы из тетрахорда в тетрахорд через общие звуки на основании их значений в античной музыкальной системе.

[15] Однако этот факт не противоречит вышесказанному о чуткости «греческого уха», игнорирующему математические расчеты.

[16] «Десятирядовая таблица» Никомаха Герасского и ее источник – «четырехрядовая таблица» Пифагора – и по сей день используется как «Таблица умножения Пифагора» в школьной практике, правда, установить, с какого времени в этом качестве она вошла в историю преподавания математики, весьма проблематично.

[17] В цитируемом издании (Сидаш 2008, 100) Меркурий (в оригинале – Гермес, он же Стильбон) с числовым показателем 81 пропущен.

[18] Если бы древним грекам были известны Уран, Нептун, Плутон, а также гипотетическая и в наше время Прозерпина, то они получили бы числовые выражения 177 147, 531 441 (что совпадает с числителями восходящего и нисходящего квинтового круга), 1 594 323, 4 782 969, а «неподвижные звёзды» – 14 348 907 соответственно.

Библиография

Александрова, Л. В. (2009) «Никомаха из Герасы. *Руководство по гармонике. О трактате и его источниках*», *ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 3.1, 161–171.

Александрова, Л. В. комм. пер., Т. Г. Мякин, пер. (2009) «Никомаха из Герасы, пифагорейца, *Руководство по гармонике, продиктованное на скорую руку, сообразно старине*», *ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 3.1, 172–205.

Беляев, В. М., ред., комм., Болдырев, А. Н., пер. с перс. (1960) Джами, Абдурахман *Трактат о музыке*. Ташкент.

Ван дер Варден, Б. Л. (1959) «Пифагорейское учение о гармонии», *Пробуждающаяся наука*, пер. с голл. И. Н. Веселовского. Москва, 395–434.

Виноградов, В. С. (1976) *Индийская рага*. Москва.

Гарбузов, Н А., ред. (1940) *Музыкальная акустика*. Москва.

Гаспаров, М. Л., пер. (1995) Диоген Лаэртский. *О жизни, учениях, изречениях знаменитых философов*. Москва.

Герцман, Е. В. (1986) *Античное музыкальное мышление*. Ленинград.

Герцман, Е. В. (1995) Боэций и его трактат о музыке, *Музыкальная Боэциана*. Санкт-Петербург, 7–184.

Герцман, Е. В. (1988) *Византийское музыкознание*. Ленинград.

Гулисашвили, Б. А. (1969) *История создания чистого строя*: Автореф. дисс. ... доктора искусствоведения. Тбилиси: Тбилисский гос. ун-тет.

Жмудь, Л. Я. (1994) *Наука, философия и религия в раннем пифагореизме*. Санкт-Петербург.

Закс, Курт (1937) Музыкальная культура Египта, *Музыкальная культура древнего мира*. Ленинград, 46–67.

Закс, Курт (1937) Музыкальная культура Вавилона и Ассирии, *Музыкальная культура древнего мира*. Ленинград, 90–108.

Иванов, Г. А., пер. (1894) Неизвестного автора (Аноним) *Введение в гармонику*, *Филологическое обозрение*, VII, кн. I–II (Москва) 3–46, 181–230.

Кашкин, Н. пер. с нем. (1898) Риман, Г. *Акустика с точки зрения музыкальной науки*. Москва.

Кубицкий, А. В., пер. (1934) Аристотель, *Метафизика*. Москва; Ленинград.

Лебедев, А. В., сост., пер. (1989) *Фрагменты ранних греческих философов*. Москва.

Лосев, А. Ф. сост., (1960) *Античная музыкальная эстетика*. Москва.

Лосев, А. Ф., Асмус, В. Ф., Тахо-Годи, А. А., ред., Егунов, А. Н., пер. (1994) Платон. Послезаконие. *Собрание сочинений в 4-х тт.* Т. 3. Москва, 438–454.

Лосев, А. Ф., сост., Тахо-Годи, А. А., примеч., Маркиш, С. П., пер. (1990) Платон. Горгий. Платон. *Собрание сочинений в 4-х тт.* Т. 1. Москва, 477–574.

Лосев, А. Ф., Асмус, В. Ф., Тахо-Годи, А. А., ред., Егунов, А. Н., пер. (1994) Платон. Государство. *Платон. Собрание сочинений в 4-х тт.* Т. 3. Москва, 79–420.

Лосев, А. Ф., сост., ред., вст. статья, Шейнман-Топштейн С. Я., пер. (1986) Платон. Лахет. *Платон. Диалоги*. Москва, 223–249.

Петухов, М. (2015) пер. с нем. Гельмгольц, Г. *Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки*. Москва.

Полынова, Н. Н., С. И. Церетели, С. И., Э. Л Радлов, Э. Л и Церетели Г. Ф., пер. (1902) Таннери, П. *Первые шаги древнегреческой науки*. Санкт-Петербург.

Рагс, Ю. Н. (1998) *Акустика в системе музыкального искусства*: дисс. в виде науч. доклада … доктора искусствоведения. Москва: Московская гос. консерватория им. П. И. Чайковского.

Сидаш, Т. Г. пер. (2008) Плутарх. О рождении души по Тимею. *Платон. Сочинения*. Санкт-Петербург: Изд. С-Петерб. ун-та. 53–114.

Тагмизян, Н. К. (1977) *Теория музыки в древней Армении*. Ереван.

Томасов, Н. Н., пер., Е. М. Браудо, комм. (1922) Плутарх, *О музыке*. Петроград.

Тюлин, Ю. Н. (1939) *Учение о гармонии*. Ленинград: вып. 1.

Цыпин, В. Г., пер., прим. (1997) Аристоксен, *Элементы гармоники*. Москва.

Цыпин, В. Г. (1998) *Аристоксен. Начало науки о музыке*. Москва.

Шестаков, В. П. (1975) *От этоса к аффекту. История музыкальной эстетики от античнсти до XVIII века*. Москва.

Щетников, А. И. пер., прим. (2012) «Аристотелевский корпус, *Музыкальные проблемы*», *ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 6.1, 87–97.

Щетников, А. И. пер., прим. (2012) «Евклидов корпус, *Деление канона*», *ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 6.1, 98–110.

REFERENCES

Düring, Ingemar von, hrsg (1930) *Die Harmonielehre des Klaudios Ptolemaios.* Göteborg.

Janus, C. ed. (1895) *Musici Scriptores Graeci.* Lipsiae.

– – – Cleonidis Isagoge harmonica. 167–207.

– – – Euclidis Sectio canonis. 113–166.

– – – Gaudenti philosophi Harmonica introduction. 317–355.

– – – Nicomachi Geraseni Enchiridion. 235–265.

– – – Pseudo-Aristoteles De rebus musicis problemata. 37–111.

Mathiesen, T. J. transl., introd., comm., annot. (1983) Aristides Quintilianus. *On music, in three books.* New Haven and London.

Seeger, H. (1966) Obertöne. *Musiklexikon in zwei Bänden*. Leipzig: B. II.

Tannery, P. (1904) Inauthenticité de la division du canon, *Mémoires Scientifiques*, III.

In Russian

Aleksandrova, L. V. (2009) «Nikomaha iz Gerasy *Rukovodstvo po garmonike. O traktate i ego istochnikah*», *ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 3.1, 161–171.

Aleksandrova, L. V. komm. per., T. G. Mjakin, per. (2009) «Nikomaha iz Gerasy, pifagorejca, *Rukovodstvo po garmonike, prodiktovannoe na skoruju ruku, soobrazno starine*», *ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 3.1, 172–205.

Beljaev, V. M., red., komm., Boldyrev, A. N., per. s pers. (1960) Dzhami, Abdurahman *Traktat o muzyke*. Tashkent.

Van der Varden, B. L. (1959) «Pifagorejskoe uchenie o garmonii», *Probuzhdajushhajasja nauka*, per. s goll. I. N. Veselovskogo. Moskva: 395–434.

Vinogradov, V. S. (1976) *Indijskaja raga*. Moskva.

Garbuzov N A., red. (1940) *Muzykal'naja akustika*. Moskva.

Gasparov, M. L., per. (1995) Diogen Lajertskij. *O zhizni, uchenijah, izrechenijah znamenityh filosofov*. Moskva.

Gercman, E. V. (1986) *Antichnoe muzykal'noe myshlenie*. Leningrad.

Gercman, E. V. (1995) Bojecij i ego traktat o muzyke, *Muzykal'naja Bojeciana*. Sankt-Peterburg: 7–184.

Gercman, E. V. (1988) *Vizantijskoe muzykoznanie*. Leningrad.

Gulisashvili, B. A. (1969) *Istorija sozdanija chistogo stroja*: Avtoref. diss. … doktora iskusstvovedenija. Tbilisi: Tbilisskij gos. un-t.

Zhmud', L. Ja. (1994) *Nauka, filosofija i religija v rannem pifagoreizme*. Sankt-Peterburg.

Zaks, Kurt (1937) Muzykal'naja kul'tura Egipta, *Muzykal'naja kul'tura drevnego mira*. Leningrad: 46–67.

Zaks, Kurt (1937) Muzykal'naja kul'tura Vavilona i Assirii, *Muzykal'naja kul'tura drevnego mira*. Leningrad, 90–108.

Ivanov, G. A., per. (1894) Neizvestnogo avtora (Anonim) Vvedenie v garmoniku, *Filologicheskoe obozrenie*, VII, kn. I–II (Moskva) 3–46, 181–230.

Kashkin, N. per. s nem. (1898) Riman, G. *Akustika s tochki zrenija muzykal'noj nauki*. Moskva.

Kubickij A. V., per. (1934) Aristotel' *Metafizika*. Moskva; Leningrad.

Lebedev, A. V., sost., per. (1989) *Fragmenty rannih grecheskih filosofov*. Moskva.

Losev, A. F. sost., (1960) *Antichnaja muzykal'naja jestetika*. Moskva.

Losev, A. F., Asmus, V. F., Taho-Godi, A. A., red., Egunov, A. N., per. (1994) Platon. Poslezakonie. *Sobranie sochinenij v 4-h tt.* T. 3. Moskva: 438–454.

Losev, A. F., sost., Taho-Godi, A. A., primech., Markish, S. P., per. (1990) Platon. Gorgij. Platon. *Sobranie sochinenij v 4-h tt.* T. 1. Moskva: 477–574.

Losev, A. F., Asmus, V. F., Taho-Godi, A. A., red., Egunov, A. N., per. (1994) Platon Gosudarstvo. *Platon. Sobranie sochinenij v 4-h tt.* T. 3. Moskva: 79–420.

Losev, A. F., sost., red., vst. stat'ja, Shejnman-Topshtejn S. Ja., per. (1986) Platon. Lahet. *Platon. Dialogi*. Moskva: 223–249.

Petuhov M. (2015) per. s nem. Gel'mgol'c, G. *Uchenie o sluhovyh oshhushhenijah kak fiziologicheskaja osnova dlja teorii muzyki*. Moskva.

Polynova N. N., S. I. Cereteli, S. I., Je. L Radlov, Je. L i Cereteli G. F., per. (1902) Tanneri, P. *Pervye shagi drevnegrecheskoj nauki*. Sankt-Peterburg.

Rags, Ju. N. (1998) A*kustika v sisteme muzykal'nogo iskusstva*: dis. v vide nauch. doklada … doktora iskusstvovedenija. Moskva: Moskovskaja gos. konservatorija im. P. I. Chajkovskogo.

Sidash T. G. per. (2008) Plutarh. O rozhdenii dushi po Timeju. *Platon. Sochinenija*. Sankt-Peterburg: Izd. S-Peterb. un-ta. 53–114.

Tagmizjan, N. K. (1977) *Teorija muzyki v drevnej Armenii*. Erevan.

Tomasov, N. N., per., E. M. Braudo, komm. (1922) Plutarh, *O muzyke*. Petrograd.

Tjulin Ju. N. (1939) *Uchenie o garmonii*. Leningrad: vyp. 1.

Cypin V. G., per., prim. (1997) Aristoksen, *Jelementy garmoniki*. Moskva.

Cypin V. G. (1998) *Aristoksen. Nachalo nauki o muzyke*. Moskva.

Shestakov V. P. (1975) *Ot jetosa k affektu. Istorija muzykal'noj jestetiki ot antichnsti do XVIII veka*. Moskva.

Shhetnikov, A. I. per., prim. (2012) Aristotelevskij korpus, *Muzykal'nye problemy. ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 6.1, 87–97.

Shhetnikov, A. I. per., prim. (2012) Evklidov korpus, *Delenie kanona. ΣΧΟΛΗ* (*Schole*) 6.1, 98–110.